

10 Stelling van Pythagoras

CORRECTIESLEUTEL

Inhoud

- Stelling van Pythagoras
- Gekeerde stelling van Pythagoras
- Toepassingen in de vlakke meetkunde
- Toepassingen in de ruimte
- 5 Toepassingen in de analytische meetkunde
- **Computationeel denken**
- **Signaaloefeningen**
- **Differentiatietraject**
- **Studiewijzer**



WAT JE AL KUNT

- rechthoekige driehoeken tekenen
- rekenen met wortelvormen
- omtrek en oppervlakte van een driehoek bepalen
- resultaten afronden op de gevraagde nauwkeurigheid



WAT JE LEERT IN DEZE MODULE

- de stelling van Pythagoras
- de vierkantswortel van een reëel getal op een getallenas construeren
- controleren of een driehoek rechthoekig is
- lengtes van lijnstukken bepalen door de stelling van Pythagoras toe te passen (in het vlak en in de ruimte)
- de coördinaat van het midden van een lijnstuk bepalen
- de afstand tussen twee punten berekenen als de coördinaten van die punten gegeven zijn
- de vergelijking van een cirkel met gegeven middelpunt en straal opstellen



IN DE KIJKER

Je noteert voldoende **tussentapen** bij het maken van berekeningen.



WISKUNDETAAL

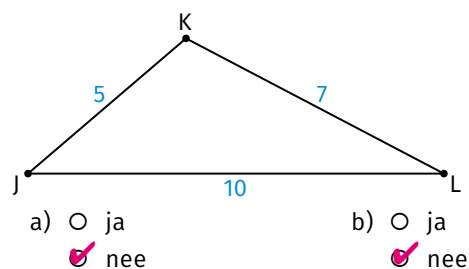
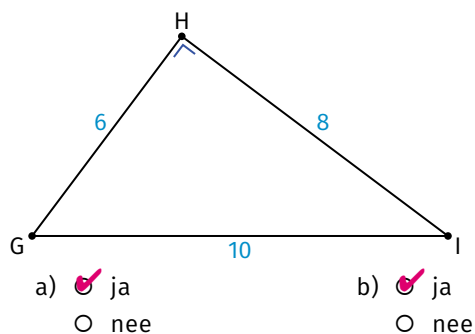
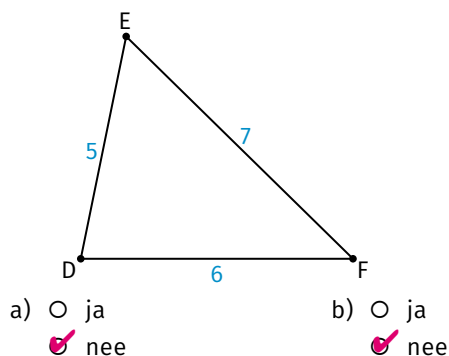
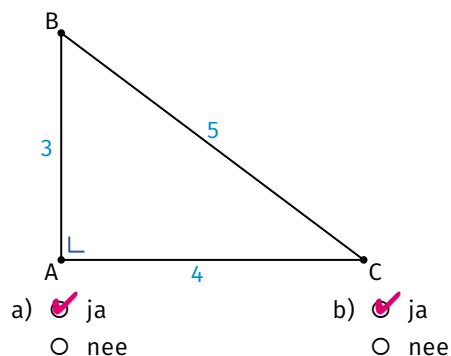
- schuine zijde of hypotenusa
- rechthoeks zijden
- overstaande zijde
- rechte hoek
- scherpe hoek
- stelling van Pythagoras
- ruimtediagonaal
- analytische meetkunde
- midden
- afstandsformule
- vergelijking van een cirkel



Opdracht 1

Hieronder zie je enkele driehoeken waarvan de lengte van de zijden in cm gegeven is.

- a) Is de som van de kwadraten van de twee kortste zijden gelijk aan het kwadraat van de langste zijde?
b) Is de driehoek rechthoekig?



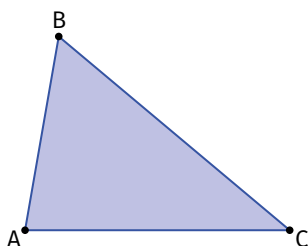
Wat stel je vast?

Bij rechthoekige driehoeken is de som van de kwadraten van de kortste zijden gelijk aan het kwadraat van de langste zijde.

Opdracht 2

Vul aan.

Kies uit: aanliggende hoeken – zijden – hoekpunten – overstaande hoek – ingesloten hoek – $\hat{A}$, $\hat{B}$ en $\hat{C}$ – AB



A, B en C zijn de hoekpunten.

De hoeken van de driehoek zijn $\hat{A}$, $\hat{B}$ en $\hat{C}$.

[AB], [BC] en [AC] zijn de zijden.

AB is de drager van de zijde [AB].

$\hat{A}$ is de overstaande hoek van de zijde [BC].

$\hat{A}$ en $\hat{C}$ zijn de aanliggende hoeken van de zijde [AC].

$\hat{B}$ is de ingesloten hoek van de zijden [AB] en [BC].

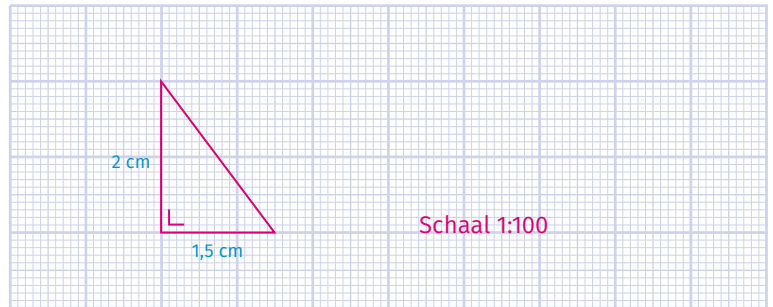
Opdracht 3



Ruitenwassers gebruiken ladders om aan hoge ramen te kunnen. De ruitenwasser moet bepalen hoe lang zijn ladder moet zijn om aan het venster te kunnen en om de ladder ver genoeg van de muur te zetten zodat hij niet omslaat.

Maak een tekening (op schaal) bij de volgende situatie.

Als het venster op 2 meter hoogte is, dan weet de ruitenwasser dat hij zijn ladder op 1,5 meter van de muur moet zetten.



Bepaal de werkelijke lengte van de ladder. Gebruik je tekening.

Op de tekening is de ladder 2,5 cm. De ladder is dus 2,5 m in werkelijkheid.

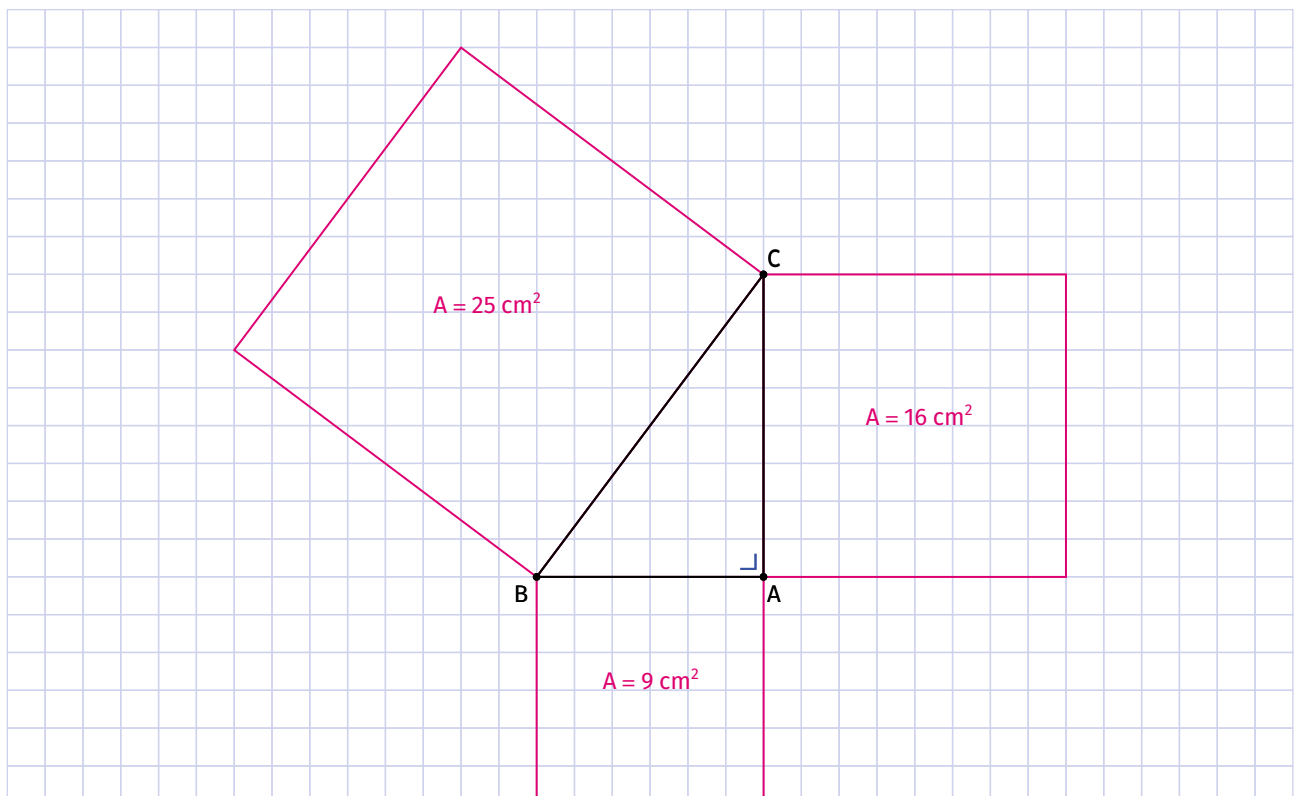
Opdracht 4

Teken op elke zijde van deze driehoek het bijhorende vierkant.

Bepaal de oppervlakte van deze drie vierkanten.

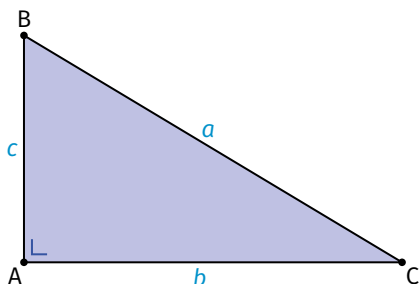
Wat stel je vast?

$$9 + 16 = 25$$



1 Stelling van Pythagoras

1.1 Basisbegrippen bij rechthoekige driehoeken



In $\triangle ABC$:

- zijn $[AB]$, $[BC]$ en $[AC]$ de **zijden** van de driehoek;
- is $[BC]$ de **schuine zijde** of **hypotenusa** met lengte a ;
- zijn $[AB]$ en $[AC]$ de **rechthoekszijden** met lengtes c en b ;
- is $[AB]$ de **overstaande zijde** van $\hat{C}$ en is $[AC]$ de overstaande zijde van $\hat{B}$;
- is $\hat{A}$ de **rechte hoek**;
- zijn $\hat{B}$ en $\hat{C}$ **scherpe hoeken**.



— Merk op —

De overstaande zijde van $\hat{A}$ is $[BC]$.
De lengte van deze zijde noteren we kortweg als a .

AFSPRAAK

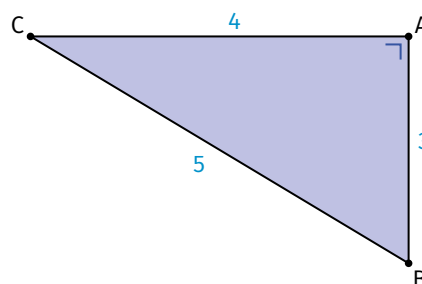


Tegenover $\hat{A}$ ligt de zijde a ,
tegenover $\hat{B}$ ligt de zijde b en
tegenover $\hat{C}$ ligt de zijde c .

1.2 De stelling van Pythagoras

In de rechthoekige $\triangle ABC$ is $\hat{A} = 90^\circ$.

$a = BC $	$b = AC $	$c = AB $
5	4	3
$a^2 = BC ^2$	$b^2 = AC ^2$	$c^2 = AB ^2$
25	16	9



We stellen vast:

$$25 = 16 + 9$$

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

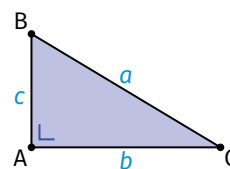
stelling

IN WOORDEN

In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de schuine zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de twee rechthoekszijden.

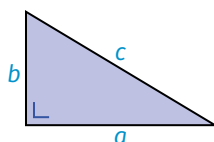
IN SYMBOLEN

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (\text{met } a \text{ als schuine zijde en } b \text{ en } c \text{ als rechthoekszijden})$$



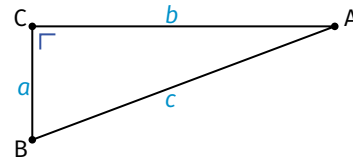
— Merk op —

Als we de stelling in woorden herlezen, moeten we beklemtonen dat het steeds het kwadraat van de schuine zijde is dat gelijk is aan de som van de kwadraten van de twee rechthoekszijden. In de figuur is a niet altijd de schuine zijde, zoals hier. Hier geldt: $c^2 = a^2 + b^2$.



1.3 Een bewijs voor de stelling van Pythagoras

Gegeven: De driehoek ABC is een rechthoekige driehoek.
 $\hat{C}$ is de rechte hoek.



Te bewijzen: $a^2 + b^2 = c^2$

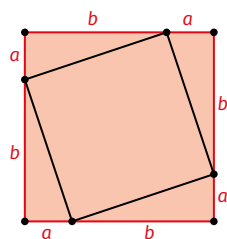
Bewijs: Met vier congruente driehoeken kun je een vierkant vormen zoals op de tekening.
 De lengte van een zijde van het gevormde vierkant is $a + b$.

De oppervlakte van dit vierkant kun je op twee manieren bepalen.

oppervlakte **rode vierkant**

is gelijk aan

de **som** van de oppervlakte van **vier blauwe driehoeken** en de oppervlakte van het **groene vierkant**.



$$(a + b)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

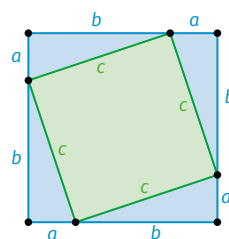
$$a^2 + b^2$$

=

=

=

=



$$4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2$$

$$2ab + c^2$$

$$c^2$$

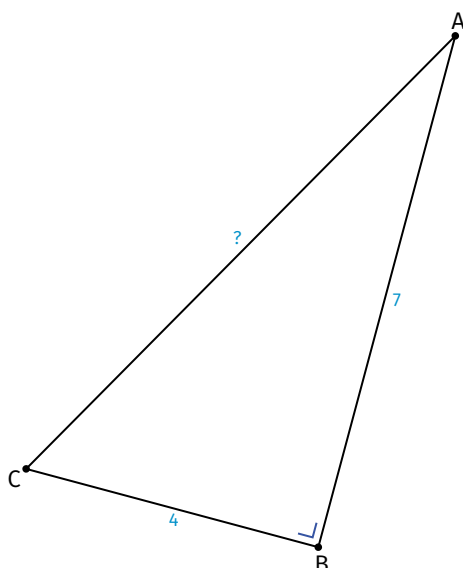


Er zijn heel wat bewijzen voor de stelling van Pythagoras. Download de bundel met andere bewijzen voor de stelling en probeer ze te begrijpen.

1.4 Een zijde berekenen in een rechthoekige driehoek

Je kunt de stelling van Pythagoras gebruiken om de lengte van een zijde van een rechthoekige driehoek te bepalen.

Voorbeeld 1



$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$

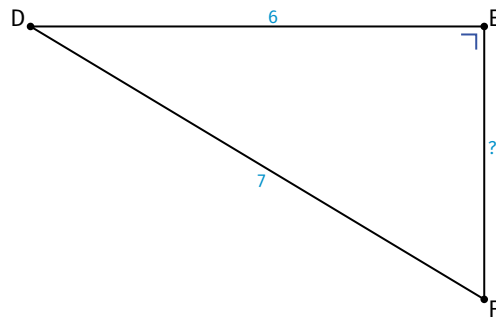
$$|AC|^2 = 7^2 + 4^2$$

$$|AC|^2 = 49 + 16$$

$$|AC|^2 = 65$$

$$|AC| = \sqrt{65}$$

Voorbeeld 2



$$\begin{aligned} |DF|^2 &= |DE|^2 + |EF|^2 \\ 7^2 &= 6^2 + |EF|^2 \\ 49 &= 36 + |EF|^2 \\ 49 - 36 &= |EF|^2 \\ 13 &= |EF|^2 \\ \sqrt{13} &= |EF| \end{aligned}$$

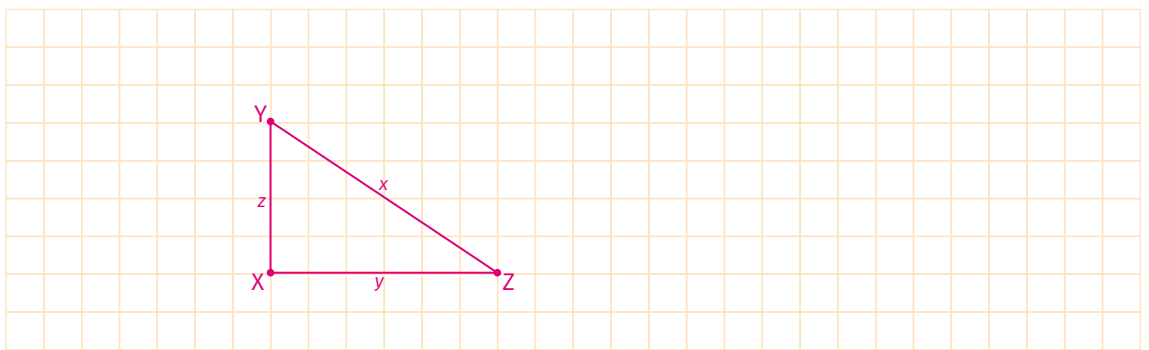


Verwerkingsopdrachten



1

- a) Teken een rechthoekige $\triangle XYZ$ met $\hat{X} = 90^\circ$.



- b) Plaats x , y en z bij de zijden van $\triangle XYZ$ volgens de afspraak en vul aan.

De schuine zijde is [YZ]

 [ZX] en [XY] zijn rechthoekszijden.

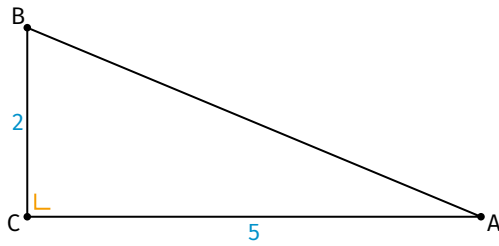
- c) Noteer de stelling van Pythagoras voor $\triangle XYZ$ in symbolen.

$$y^2 + z^2 = x^2$$

2

Bereken $|AB|$ met behulp van de stelling van Pythagoras.

a)



$$|AC|^2 + |CB|^2 = |AB|^2$$

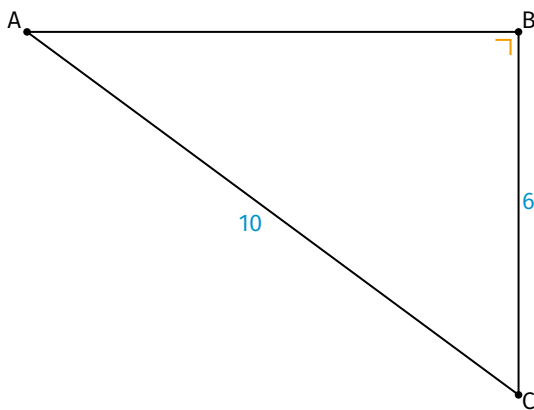
$$5^2 + 2^2 = |AB|^2$$

$$25 + 4 = |AB|^2$$

$$29 = |AB|^2$$

$$\sqrt{29} = |AB|$$

b)



$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$

$$|AB|^2 + 6^2 = 10^2$$

$$|AB|^2 + 36 = 100$$

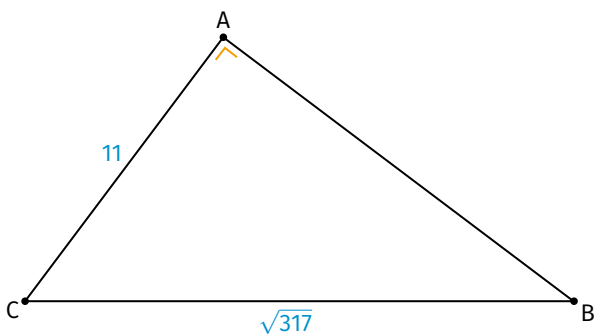
$$|AB|^2 = 100 - 36$$

$$|AB|^2 = 64$$

$$|AB| = \sqrt{64}$$

$$|AB| = 8$$

c)



$$|AC|^2 + |AB|^2 = |BC|^2$$

$$11^2 + |AB|^2 = (\sqrt{317})^2$$

$$121 + |AB|^2 = 317$$

$$|AB|^2 = 317 - 121$$

$$|AB|^2 = 196$$

$$|AB| = \sqrt{196}$$

$$|AB| = 14$$

2 De omgekeerde stelling van Pythagoras

omgekeerde
stelling

IN WOORDEN

Als in een driehoek het kwadraat van de langste zijde gelijk is aan de som van de kwadraten van de twee andere zijden, dan is deze driehoek rechthoekig.

Gegeven: $\triangle ABC$
 $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$

Te bewijzen: $\hat{A} = 90^\circ$

Bewijs:

Stap 1: Construeer $\triangle A'B'C'$ met $\hat{A'} = 90^\circ$, $|A'B'| = |AB|$ en $|A'C'| = |AC|$.
 In $\triangle A'B'C'$ geldt dan: $|B'C'|^2 = |A'B'|^2 + |A'C'|^2$ (stelling van Pythagoras) (1)

Stap 2: In $\triangle ABC$ geldt: $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$ (gegeven) (2)

Uit (1) en (2) leiden we af dat $|B'C'|^2 = |BC|^2$ (want $|A'B'| = |AB|$ en $|A'C'| = |AC|$)
 dus is $|B'C'| = |BC|$.

Stap 3: In $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} |AB| = |A'B'| \quad (\text{constructie}) \\ |AC| = |A'C'| \quad (\text{constructie}) \\ |BC| = |B'C'| \quad (\text{zie stap 2}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \quad \text{even grote hoeken in congruente driehoeken}$$

$$\hat{A} = \hat{A'}$$

$$\hat{A} = 90^\circ$$

Conclusie: Als de lengten van de zijden van een driehoek gegeven zijn, kan door de omgekeerde stelling van Pythagoras toe te passen, nagegaan worden of de driehoek rechthoekig is.

Voorbeeld 1

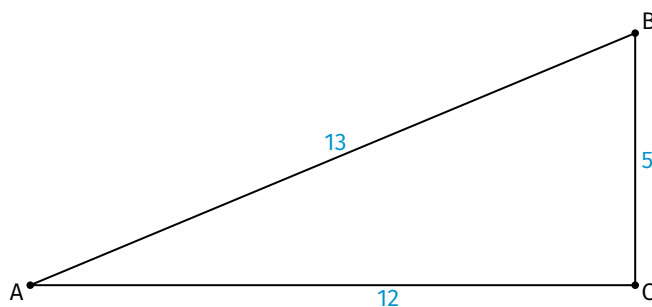
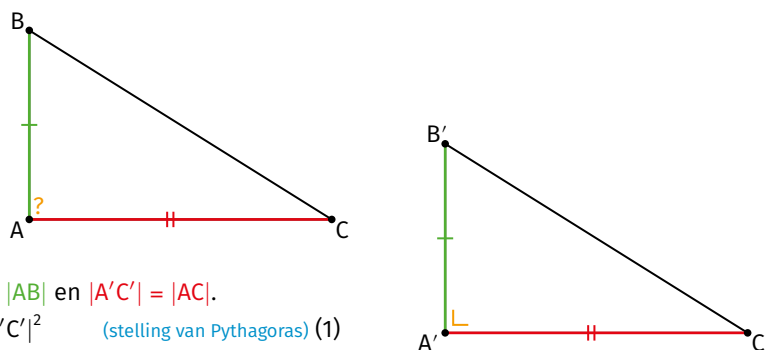
Gegeven: $\triangle ABC$
 $|AB| = 13$
 $|BC| = 5$
 $|AC| = 12$

Gevraagd: Is $\triangle ABC$ rechthoekig?

Oplossing:

$ AB ^2 = 13^2$ $= 169$	$ AC ^2 + BC ^2 = 12^2 + 5^2$ $= 144 + 25$ $= 169$
----------------------------	---

Besluit: $\triangle ABC$ is rechthoekig.



Voorbeeld 2

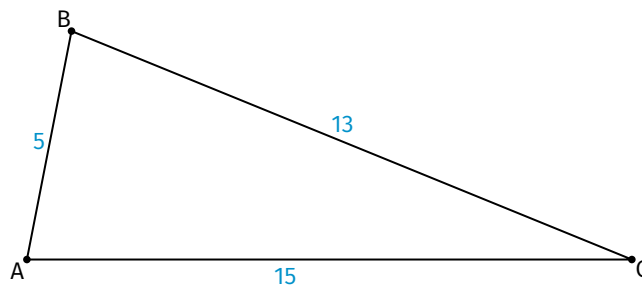
Gegeven: $\triangle ABC$
 $|AB| = 15$
 $|BC| = 13$
 $|AC| = 5$

Gevraagd: Is $\triangle ABC$ rechthoekig?

Oplossing:

$ AB ^2 = 15^2$ $= 225$	$ AC ^2 + BC ^2 = 5^2 + 13^2$ $= 25 + 169$ $= 194$
----------------------------	---

Besluit: $\triangle ABC$ is niet rechthoekig.



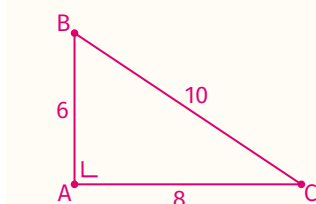
Verwerkingsopdrachten



3

Ga na, met behulp van een berekening, of de driehoek rechthoekig is. Indien de driehoek rechthoekig is, noteer dan welke hoek 90° is.

a) $|AB| = 6$, $|BC| = 10$ en $|AC| = 8$



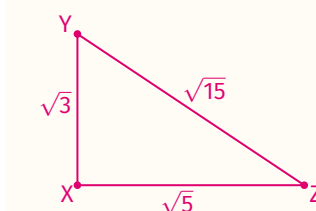
$ AB ^2 + AC ^2 = 6^2 + 8^2$ $= 36 + 64$ $= 100$	$ BC ^2 = 10^2$ $= 100$
---	----------------------------

Antwoord: $\triangle ABC$ is rechthoekig in $\hat{A}$.



TIP Maak een schets. De schuine zijde ligt altijd tegenover de rechte hoek.

b) $|XY| = \sqrt{3}$, $|XZ| = \sqrt{5}$ en $|YZ| = \sqrt{15}$



$ XY ^2 + XZ ^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2$ $= 3 + 5$ $= 8$	$ YZ ^2 = (\sqrt{15})^2$ $= 15$
---	------------------------------------

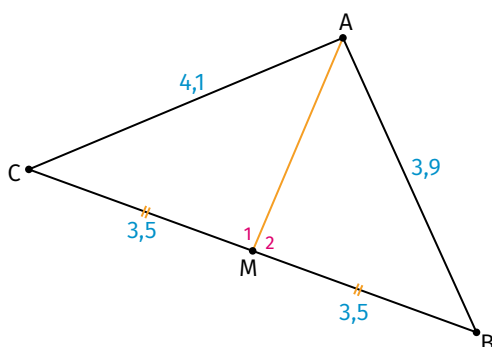
Antwoord: $\triangle XYZ$ is niet rechthoekig.

4

Pieter beweert dat AM de middelloodlijn is van $[BC]$.

Lloyd zegt dat AM de zwaartelijn is uit $\hat{A}$.

Wie heeft gelijk? Toon aan met behulp van de stelling van Pythagoras.



Opdat AM de middelloodlijn zou zijn van $[BC]$ moet $AM \perp BC$ of $\hat{M}_1 = 90^\circ$ en $\hat{M}_2 = 90^\circ$.

Als dat zo is, dan geldt: (Pythagoras)

$$|AM|^2 + |MC|^2 = |AC|^2 \quad \text{en} \quad |AM|^2 + |MB|^2 = |AB|^2$$

$$|AM|^2 = |AC|^2 - |MC|^2 \quad |AM|^2 = |AB|^2 - |MB|^2$$

$$\begin{aligned} |AC|^2 - |MC|^2 &\stackrel{?}{=} |AB|^2 - |MB|^2 \\ (4,1)^2 - (3,5)^2 &\stackrel{?}{=} (3,9)^2 - (3,5)^2 \\ (4,1)^2 &\neq (3,9)^2 \end{aligned}$$

Antwoord: AM is enkel de zwaartelijn uit $\hat{A}$, dus Lloyd heeft gelijk.

3 Toepassingen in de vlakke meetkunde

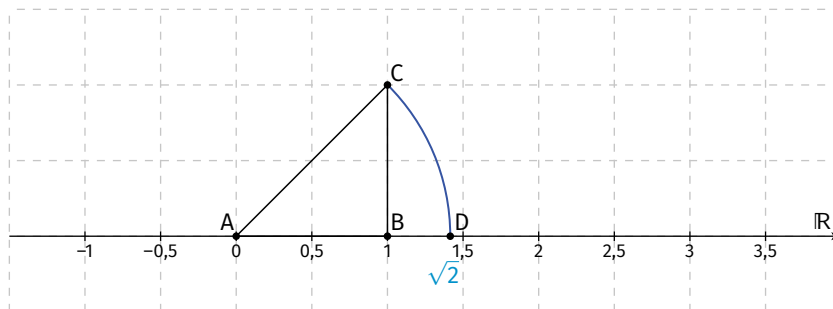
3.1 Het construeren van een vierkantswortel van een reëel getal

In de module over reële getallen leerde je al een methode om π te construeren op een getallenas. Met behulp van de stelling van Pythagoras kan je ook andere irrationale getallen construeren op de getallenas.

Voorbeeld

In een rechthoekige driehoek waarvan de rechthoekszijden een lengte 1 hebben, zal de schuine zijde een lengte van $\sqrt{2}$ hebben.

We krijgen dus:



Hoe $\sqrt{2}$ construeren?

methode

STAP 1: Kies een lijnstuk met lengte 1 op de getallenas.

STAP 2: Teken in het punt met abscis 1 een lijnstuk loodrecht hierop met lengte 1.

STAP 3: Verbind het punt 0 met het eindpunt van het loodrechte lijnstuk. Deze schuine zijde heeft een lengte $\sqrt{2}$.

STAP 4: Plaats je passerpunt in het punt 0 en pas de lengte van de schuine zijde af op de getallenas: $|AD| = \sqrt{2}$.

Ook andere vierkantswortels kun je op de reële getallenas voorstellen.

Voorbeeld

$$\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1^2}$$

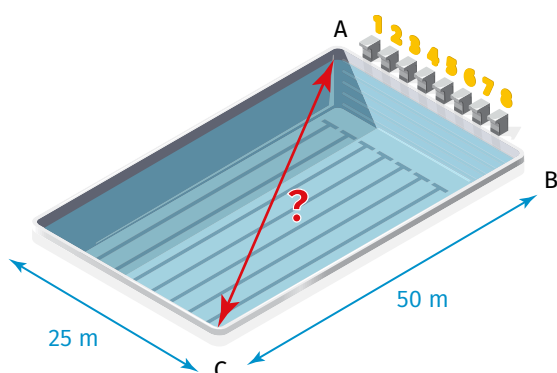


TIP Schrijf het grondtal van de vierkantswortel als een som van 2 kwadraten.

3.2 Het berekenen van de lengte van een diagonaal in een rechthoek

Voorbeeld

Een architect ontwerpt een nieuw olympisch zwembad voor Oostende. Het zwembad is rechthoekig met een breedte van 25 meter en een lengte van 50 meter. De stad vraagt aan de architect om te onderzoeken hoe lang de diagonaal van het zwembad zou zijn zodat ze een touw kunnen bestellen om het zwembad in twee congruente driehoeken te verdelen. Het touw kan enkel besteld worden per lopende meter. Hoeveel meter touw moet men bestellen?



In $\triangle ABC$ geldt:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$

$$|AC|^2 = 25^2 + 50^2$$

$$|AC|^2 = 625 + 2500$$

$$|AC|^2 = 3125$$

$$|AC| = \sqrt{3125}$$

$$|AC| = 55,90\dots$$

$$|AC| \approx 56 \text{ (afroonden op 1 m)}$$

Antwoord: Het touw moet 56 meter lang zijn.



— Merk op —

Bij het berekenen van de lengte van een zijde van een rechthoekige driehoek verkrijgen we meestal een wortelvorm. Bij verdere berekeningen blijf je gebruik maken van deze wortelvorm. Alleen bij het eindresultaat mag je het resultaat afronden zoals gevraagd wordt.

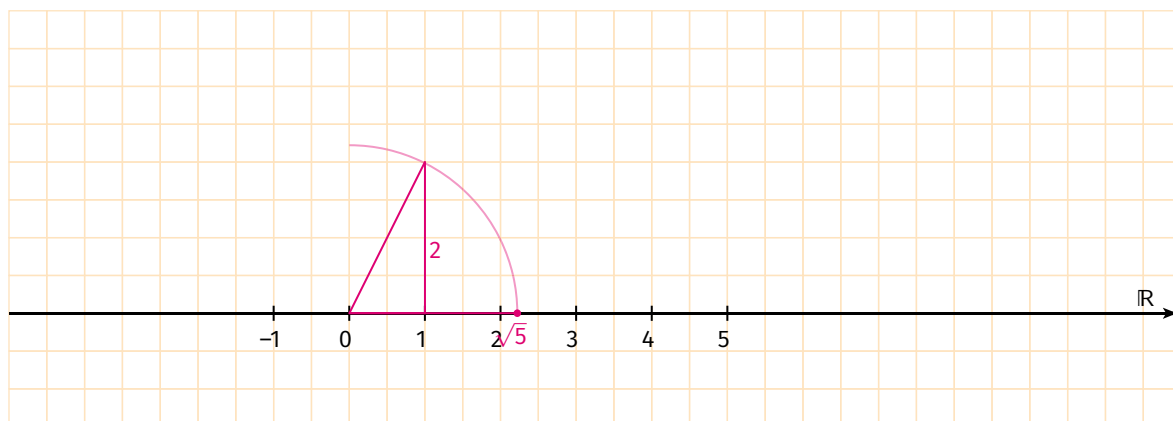


Verwerkingsopdrachten



5

Construeer $\sqrt{5}$ op de getallenas.

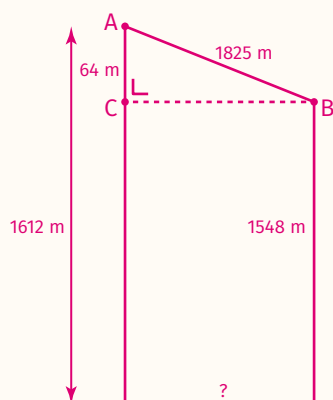


6

De Vanoise Express is een kabelbaan in het Franse skigebied Paradiski. Het verbindt La Plagne met Les Arcs. De kabelbaan is 1825 meter lang en het hoogteverschil tussen de stations in La Plagne (1548 m) en Les Arcs (1612 m) is 64 m. Hoe ver liggen de skigebieden – in vogelvlucht – uit elkaar?



TIP Maak eerst een schets.



$$\begin{aligned}
 |AC|^2 + |BC|^2 &= |AB|^2 \\
 64^2 + |BC|^2 &= 1825^2 \\
 4096 + |BC|^2 &= 3\,330\,625 \\
 |BC|^2 &= 3\,330\,625 - 4096 \\
 |BC|^2 &= 3\,326\,529 \\
 |BC| &= \sqrt{3\,326\,529} \\
 |BC| &\approx 1823,88
 \end{aligned}$$

Antwoord: De skigebieden liggen in vogelvlucht ongeveer 1823,88 m uit elkaar.

4 Toepassingen in de ruimte

4.1 Lengte van een ruimtediagonaal berekenen

Om de omtrek van de driehoek AFE te bepalen, moet je de lengte van [AE] bepalen, maar ook de lengte van de ruimtediagonaal (lichaamsdiagonaal) [AF].

- Stap 1: Bereken |AE| in $\triangle AEB$.

$$|AE|^2 = |AB|^2 + |BE|^2$$

$$|AE|^2 = 5^2 + 4^2$$

$$|AE|^2 = 25 + 16$$

$$|AE|^2 = 41$$

$$|AE| = \sqrt{41}$$

- Stap 2: Bereken |AF| in $\triangle AFE$.

$$|AF|^2 = |AE|^2 + |EF|^2$$

$$|AF|^2 = (\sqrt{41})^2 + 13^2$$

$$|AF|^2 = 41 + 169$$

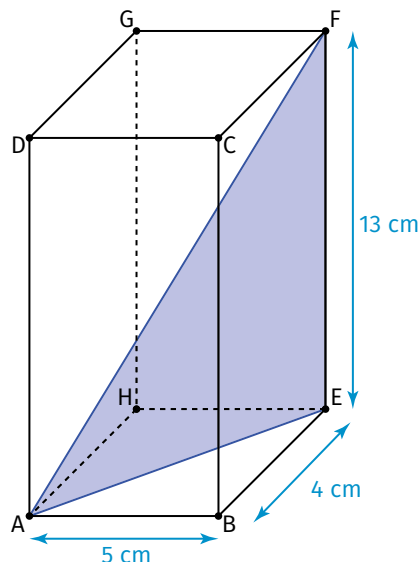
$$|AF|^2 = 210$$

$$|AF| = \sqrt{210}$$

- Stap 3: Bepaal de omtrek (op 1 mm nauwkeurig).

$$p_{\triangle AFE} = \sqrt{41} \text{ cm} + 13 \text{ cm} + \sqrt{210} \text{ cm}$$

$$\approx 33,9 \text{ cm}$$



4.2 Hoogte van een piramide berekenen

In deze piramide kennen we de lengte van alle ribben. We kunnen met behulp van de stelling van Pythagoras de hoogte berekenen. De hoogte van de piramide bevindt zich in de rechthoekige driehoek EFB en je weet dat $|BF| = \frac{1}{2}|BD|$.

- Stap 1: Bereken |BD| in de rechthoekige driehoek ABD.

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2$$

$$|BD|^2 = 4^2 + 6^2$$

$$|BD|^2 = 16 + 36$$

$$|BD|^2 = 52$$

$$|BD| = \sqrt{52}$$

$$|BD| = 2\sqrt{13}$$

- Stap 2: Bereken |EF| in de rechthoekige driehoek EFB.

$$|EB|^2 = |BF|^2 + |EF|^2$$

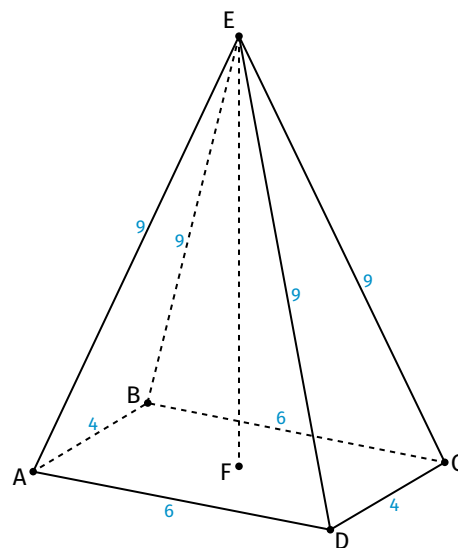
$$9^2 = (\sqrt{13})^2 + |EF|^2 \quad |BF| = \frac{1}{2}|BD| = \sqrt{13}$$

$$81 = 13 + |EF|^2$$

$$81 - 13 = |EF|^2$$

$$68 = |EF|^2$$

$$\sqrt{68} = |EF|$$



Antwoord: De exacte lengte van de hoogte van deze piramide is $\sqrt{68}$.



Verwerkingsopdrachten



7

a) Bepaal de afmetingen van jullie klaslokaal en maak een schets van de situatie.

antwoord van de leerlingen

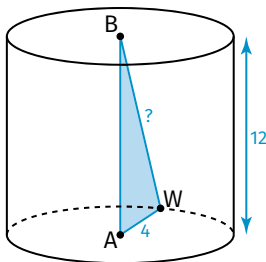
b) Bereken de lengte van de ruimtediagonaal in jouw klaslokaal.

antwoord van de leerlingen

8

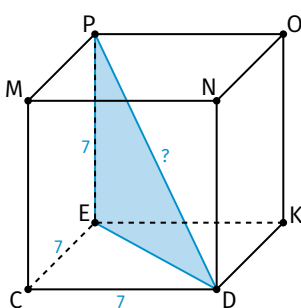
Formuleer de stelling van Pythagoras voor de gekleurde rechthoekige driehoeken en bereken $|BW|$, $|PD|$ en $|UV|$.

a)



$$\begin{aligned} |AB|^2 + |AW|^2 &= |BW|^2 \\ 12^2 + 4^2 &= |BW|^2 \\ 144 + 16 &= |BW|^2 \\ 160 &= |BW|^2 \\ \sqrt{160} &= |BW| \\ 4\sqrt{10} &= |BW| \end{aligned}$$

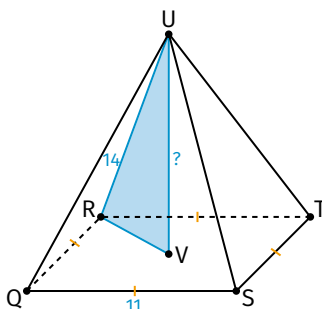
b)



$$\begin{aligned} \text{In } \triangle CED: \\ |EC|^2 + |CD|^2 &= |ED|^2 \\ 7^2 + 7^2 &= |ED|^2 \\ 49 + 49 &= |ED|^2 \\ 98 &= |ED|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In } \triangle PED: \\ |EP|^2 + |ED|^2 &= |PD|^2 \\ 7^2 + 98 &= |PD|^2 \\ 49 + 98 &= |PD|^2 \\ 147 &= |PD|^2 \\ \sqrt{147} &= |PD| \\ 7\sqrt{3} &= |PD| \end{aligned}$$

c)



$$\begin{aligned} \text{In } \triangle RVQ: \\ |RV|^2 + |QV|^2 &= |RQ|^2 \\ |RV|^2 + |RV|^2 &= 11^2 \\ 2|RV|^2 &= 121 \\ |RV|^2 &= \frac{121}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In } \triangle RUV: \\ |RV|^2 + |UV|^2 &= |RU|^2 \\ \frac{121}{2} + |UV|^2 &= 14^2 \\ \frac{121}{2} + |UV|^2 &= 196 \\ |UV|^2 &= 196 - \frac{121}{2} \\ |UV|^2 &= \frac{271}{2} \\ |UV| &= \sqrt{\frac{271}{2}} \end{aligned}$$

5 Toepassingen in de analytische meetkunde

In de analytische meetkunde proberen we om meetkunde algebraïsch te beschrijven en die na te gaan. We werken in een cartesisch assenstelsel zodat we kunnen gebruikmaken van coördinaten. Doordat we aan elk punt een coördinaat kunnen toekennen, kunnen we algebraïsch rekenwerk uitvoeren en meetkundige objecten beschrijven.

Om het principe te snappen beginnen we met een eenvoudig voorbeeld: het midden van een lijnstuk. Daarna kijken we hoe we dit binnen de analytische meetkunde verder kunnen uitbouwen door gebruik te maken van de stelling van Pythagoras.

In de module over rechten en merkwaardige lijnen zal je opnieuw een stukje analytische meetkunde aanleren.

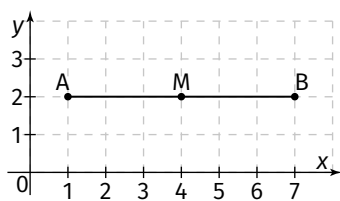
Ook in de volgende jaren breiden we die kennis uit.

5.1 Het midden van een lijnstuk

Een aantal lijnstukken werden telkens in een assenstelsel getekend. Ook het midden van elk lijnstuk werd bepaald.

Kan je met de coördinaatgetallen van de grenspunten van een lijnstuk de coördinaatgetallen van het midden van dat lijnstuk bepalen?

Voorbeelden



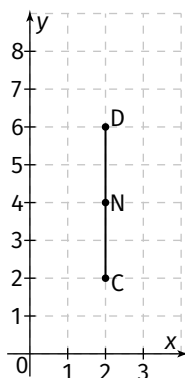
A(1, 2)
B(7, 2)
M(4, 2)

Vaststelling

Enkel de x-coördinaten veranderen, de y-coördinaten blijven gelijk.

De x-coördinaat van het midden vinden we door:

$$\frac{1+7}{2} = 4$$



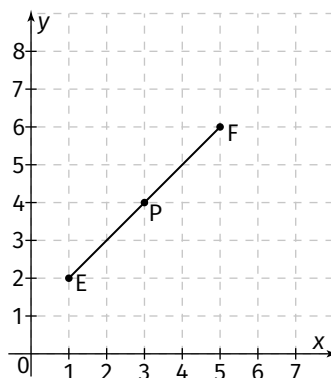
C(2, 2)
D(2, 6)
N(2, 4)

Vaststelling

Enkel de y-coördinaten veranderen, de x-coördinaten blijven gelijk.

De y-coördinaat van het midden vinden we door:

$$\frac{2+6}{2} = 4$$



E(1, 2)
F(5, 6)
P(3, 4)

Vaststelling

Zowel de x- als de y-coördinaten veranderen.

De x-coördinaat van het midden vinden we door:

$$\frac{1+5}{2} = 3$$

De y-coördinaat van het midden vinden we door:

$$\frac{2+6}{2} = 4$$

formule

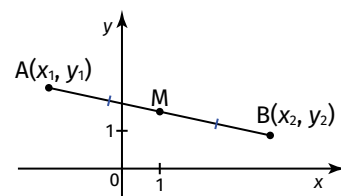
Als M het midden is van lijnstuk [AB] met A(x₁, y₁) en B(x₂, y₂), dan is

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



— Merk op —

Het bewijs van deze formule kun je opstellen in de module over de stelling van Thales.



5.2 De afstandsformule

We bekijken een rechthoekige $\triangle ABC$ in een assenstelsel met:

$$A(2, 1)$$

$$B(5, 3)$$

$$C(5, 1)$$

De afstand tussen A en B kunnen we bepalen aan de hand van de stelling van Pythagoras

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

$|AC|$ en $|BC|$ kunnen we bepalen door gebruik te maken van de gegeven coördinaten.

$$|AC| = 5 - 2 = 3$$

$$|BC| = 3 - 1 = 2$$

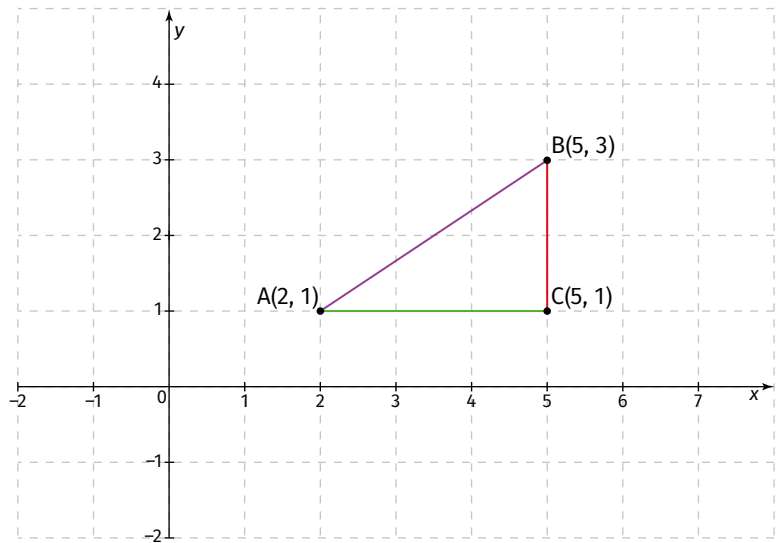
We krijgen:

$$|AB|^2 = 3^2 + 2^2$$

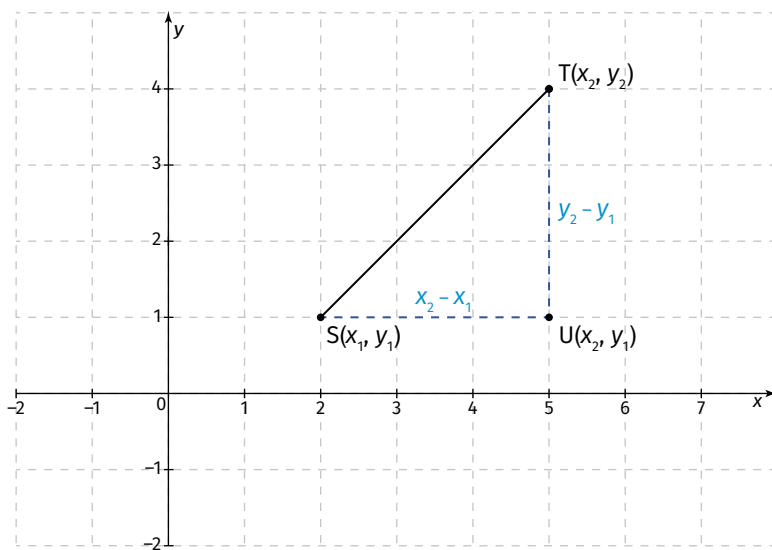
$$= 9 + 4$$

$$= 13$$

dus $|AB| = \sqrt{13}$



Algemeen



Gegeven: $S(x_1, y_1)$

$T(x_2, y_2)$

We bepalen een rechthoekige $\triangle STU$ rechthoekig in U met $U(x_2, y_1)$.

$$|ST|^2 = |SU|^2 + |TU|^2$$

$$|ST|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

$$|ST|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$|ST| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

formule De afstand tussen twee punten $P(x_1, y_1)$ en $Q(x_2, y_2)$ kan berekend worden met behulp van de afstandsformule:

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



— Merk op —

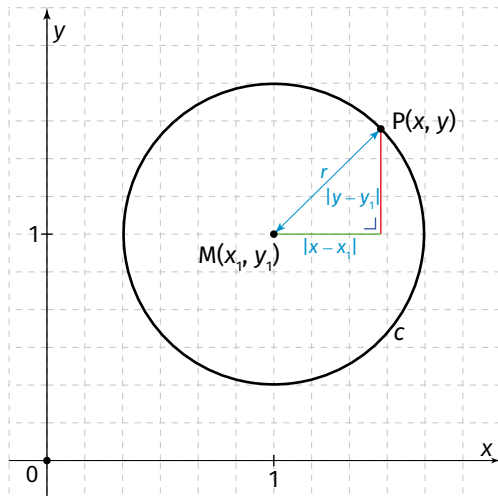
$$(3 - 2)^2 = (2 - 3)^2$$

of

$$(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$$

5.3 Vergelijking van een cirkel opstellen

Een cirkel c met middelpunt $M(x_1, y_1)$ en straal r is de verzameling van alle punten die op dezelfde afstand (r) van het middelpunt M liggen.



$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

We stellen de analytische vergelijking van de cirkel op. De voorwaarde waaraan een punt $P(x, y)$ in het vlak moet voldoen zodat het tot de cirkel behoort:

$$\begin{aligned} P(x, y) \text{ ligt op } c_{(M, r)} &\leftrightarrow |MP| = r \\ &|MP|^2 = r^2 \\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

definitie De vergelijking van een cirkel met middelpunt $M(x_1, y_1)$ en straal r is:

$$c \leftrightarrow (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$$

Voorbeeld

We bepalen de vergelijking van de cirkel c met middelpunt $M(4, 2)$ en straal 7.

$$c \leftrightarrow (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 49$$



— Merk op —

Als je de haakjes in de vergelijking uitwerkt, bekom je

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 49$$

$$x^2 - 8x + y^2 - 4y - 29 = 0$$



Verwerkingsopdrachten



9

Bereken de afstand, op 2 decimalen nauwkeurig, tussen de punten K en M.
Vul eerst de formule in en reken daarna uit.

a) K(0, 5) en M(2, 9)

$$\begin{aligned} |KM| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ wordt: } |KM| &= \sqrt{(2 - 0)^2 + (9 - 5)^2} \\ & &= \sqrt{2^2 + 4^2} \\ & &= \sqrt{4 + 16} \\ & &= \sqrt{20} \\ & &= \sqrt{4 \cdot 5} \\ & &= 2\sqrt{5} \\ & &= 4,4721359... \\ & &\approx 4,47 \end{aligned}$$

b) K(-4, 8) en M(9, 4)

$$\begin{aligned} |KM| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ wordt: } |KM| &= \sqrt{(9 + 4)^2 + (4 - 8)^2} \\ & &= \sqrt{13^2 + (-4)^2} \\ & &= \sqrt{169 + 16} \\ & &= \sqrt{185} \\ & &= 13,6014705... \\ & &\approx 13,60 \end{aligned}$$

c) K(-5, -3) en M(1, 2)

$$\begin{aligned} |KM| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ wordt: } |KM| &= \sqrt{(1 + 5)^2 + (2 + 3)^2} \\ & &= \sqrt{6^2 + 5^2} \\ & &= \sqrt{36 + 25} \\ & &= \sqrt{61} \\ & &= 7,8102496... \\ & &\approx 7,81 \end{aligned}$$

10

Gegeven: $\triangle ABC$ met $A(2, 0)$, $B(0, -4)$ en $C(4, -2)$

Gevraagd: Bepaal de lengte van de drie zwaartelijnen in deze driehoek.

- Coördinaat van M, het midden van [AB]:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{2 + 0}{2}, \frac{0 - 4}{2}\right)$$

$$M(1, -2)$$

- Coördinaat van N, het midden van [BC]:

$$N\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right)$$

$$N\left(\frac{0 + 4}{2}, \frac{-4 - 2}{2}\right)$$

$$N(2, -3)$$

- Coördinaat van P, het midden van [AC]:

$$P\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right)$$

$$P\left(\frac{2 + 4}{2}, \frac{0 - 2}{2}\right)$$

$$P(3, -1)$$

$$\begin{aligned} \bullet |MC| &= \sqrt{(x_C - x_M)^2 + (y_C - y_M)^2} \\ &= \sqrt{(4 - 1)^2 + (-2 + 2)^2} \\ &= \sqrt{9 + 0} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet |NA| &= \sqrt{(x_A - x_N)^2 + (y_A - y_N)^2} \\ &= \sqrt{(2 - 2)^2 + (0 + 3)^2} \\ &= \sqrt{0 + 9} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet |PB| &= \sqrt{(x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2} \\ &= \sqrt{(0 - 3)^2 + (-4 + 1)^2} \\ &= \sqrt{9 + 9} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

11

Stel de vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(0, -2)$ en straal $\sqrt{5}$.

$$c \leftrightarrow (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

$$(x - 0)^2 + (y + 2)^2 = (\sqrt{5})^2$$

$$x^2 + (y + 2)^2 = 5$$

$$x^2 + y^2 + 4y + 4 = 5$$

$$x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$$



Computationeel denken

Variabelen en datatypes

Hoeveel foto's staan op jouw smartphone? Vermoedelijk ken je niet het exacte aantal, maar het zijn er ongetwijfeld veel. Om het aantal foto's weer te geven wordt er een **variabele** bijgehouden.

Wanneer je in codeertaal een nieuwe variabele aanmaakt, gebruik je **var** gevolgd door de naam van de variabele. Het gelijktteken is hier de **toewijzingsoperator** die de waarde van de variabele instelt.



```
1 aantalFotos = 0
2 #het datatype van deze variabele is INT (geheel getal)
```

Het aantal foto's wijzigt regelmatig.

Neem je een nieuwe foto, dan moet de variabele met 1 worden vermeerderd.



```
3 aantalFotos = aantalFotos + 1
of
3 aantalFotos += 1
```

Verwijder je een nieuwe foto, dan moet de variabele met 1 worden verminderd.

Welke code zou je dan moeten invoeren?

```
aantalFotos = aantalFotos - 1 of aantalFotos -= 1
```

Bij variabelen van het **datatype INT** kun je rekenkundige operatoren (+, -, * en /) gebruiken.

We passen dit even toe op een begrip uit de wiskunde: pythagorese drietallen. Visueel zouden we dat in Scratch zo kunnen begrijpen:



TIP Drie natuurlijke getallen a , b en c vormen een pythagorees drietal als $a^2 + b^2 = c^2$.

Begrijp je de code?

a) Waarom wordt er drie keer een vraag gesteld?

De gebruiker moet 3 verschillende getallen invoeren om na te gaan of ze een pythagorees drietal vormen.

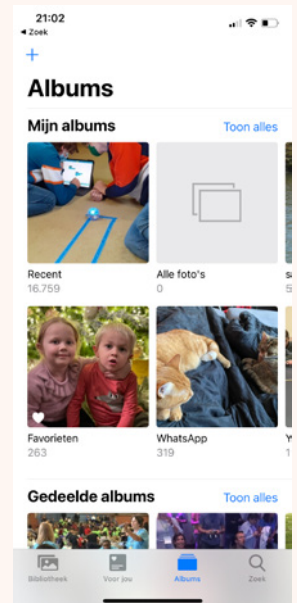
Er wordt dus een waarde toegekend aan 3 verschillende variabelen.

b) Hoe programmeer je het kwadraat van een getal?

Als het product van dat getal met zichzelf.

c) Welke melding krijg je bij het uitvoeren van het programma?

Er wordt vermeld of de ingevoerde getallen al dan niet een pythagorees drietal vormen.





Bij het tekstueel programmeren in programmeertalen zoals Python of Swift, krijg je een code als deze:

```
1 grootste = int(input("Voer het grootste getal in. "))
2 a = int(input("Voer het kleinste getal in. "))
3 b = int(input("Voer het derde getal in. "))
4 linkerlid = grootste*grootste
5 rechterlid = a*a+b*b
6 if linkerlid == rechterlid:
7     print("De getallen vormen een pythagorees drietal.")
8 else:
9     print("De getallen vormen geen pythagorees drietal.")
```

Begrijp je de code?

a) Wat gebeurt er als de eerste regel van de code wordt uitgevoerd?

De ingevoerde waarde wordt toegekend aan de variabele 'grootste'.

b) Waarom is het belangrijk dat je eerst het grootste getal laat invoeren?

Omdat, volgens de stelling van Pythagoras, het kwadraat van de grootste waarde apart staat in het (linker)lid.

c) Hoe zou je de code kunnen aanpassen zodat de volgorde van invoer er niet toe doet?

```
1 eerste = int(input("Voer het eerste getal in. "))
2 tweede = int(input("Voer het tweede getal in. "))
3 derde = int(input("Voer het derde getal in. "))
4 drietal = [eerste, tweede, derde]
5 drietal.sort()
6 a = drietal[0]
7 b = drietal[1]
8 c = drietal[2]
9 linkerlid = c*c
10 rechterlid = a*a+b*b
11 if linkerlid == rechterlid:
12     print("De getallen vormen een pythagorees drietal.")
13 else:
14     print("De getallen vormen geen pythagorees drietal.")
```



Nu je deze nieuwe concepten begrijpt, kun je verder aan de slag.

Download via POLPO de oefeningen en het traject om je te verdiepen in variabelen en datatypes.

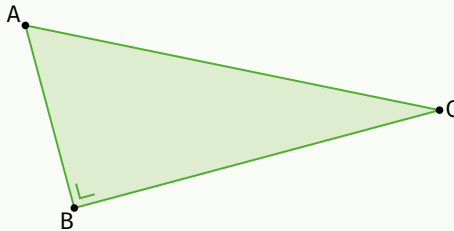


Signaal oefeningen

1

Formuleer telkens onder de figuur voor de gekleurde driehoek de stelling van Pythagoras in symbolen.

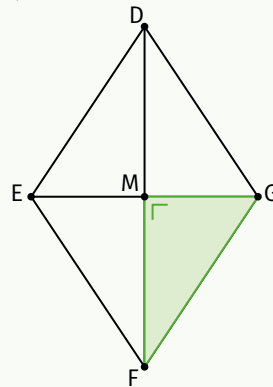
a)



$$b^2 = a^2 + c^2$$

$$\text{of } |AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$

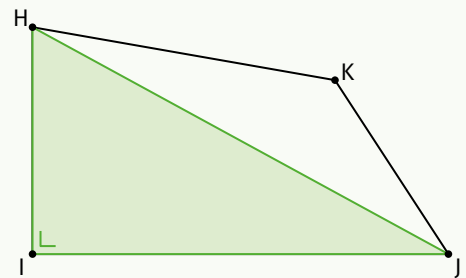
b)



$$m^2 = f^2 + g^2$$

$$\text{of } |FG|^2 = |FM|^2 + |MG|^2$$

c)



$$i^2 = j^2 + h^2$$

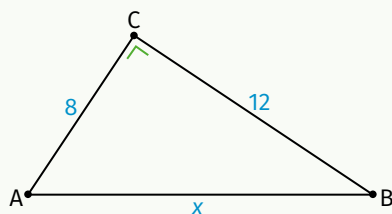
$$\text{of } |HJ|^2 = |HI|^2 + |IJ|^2$$

>>> Verder oefenen: D1 t.e.m. D10

2

Bereken de lengte van de ontbrekende zijden in de rechthoekige driehoeken.

a)



$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$$

$$8^2 + 12^2 = x^2$$

$$64 + 144 = x^2$$

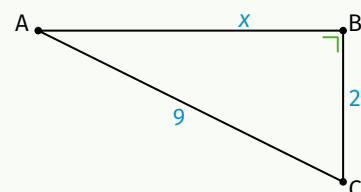
$$208 = x^2$$

$$\sqrt{208} = x$$

$$\sqrt{16 \cdot 13} = x$$

$$4\sqrt{13} = x$$

b)



$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$

$$x^2 + 2^2 = 9^2$$

$$x^2 + 4 = 81$$

$$x^2 = 81 - 4$$

$$x^2 = 77$$

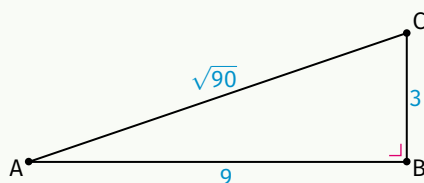
$$x = \sqrt{77}$$

>>> Verder oefenen: D1 t.e.m. D10

3

Zijn de driehoeken met gegeven zijden rechthoekig? Zo ja, duid de rechte hoek aan en noteer je berekening.

a)



$$|AB|^2 + |BC|^2 = 9^2 + 3^2$$

$$= 81 + 9$$

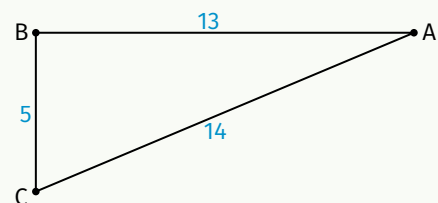
$$= 90$$

$$|AC|^2 = (\sqrt{90})^2$$

$$= 90$$

Antwoord: $\triangle ABC$ is rechthoekig in $\hat{B}$.

b)



$$|AB|^2 + |BC|^2 = 13^2 + 5^2$$

$$= 169 + 25$$

$$= 194$$

$$|AC|^2 = 14^2$$

$$= 196$$

Antwoord: $\triangle ABC$ is niet rechthoekig.

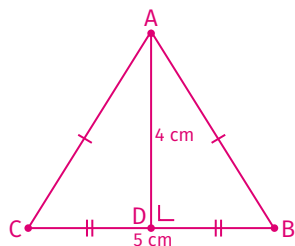
>>> Verder oefenen: D11 t.e.m. D15

4

In een gelijkbenige driehoek ABC is de basis 5 cm en de hoogte uit de top 4 cm. Bereken de lengte van één van de benen.



TIP Maak eerst een schets.



$$\begin{aligned} |AD|^2 + |BD|^2 &= |AB|^2 \\ 4^2 + (2,5)^2 &= |AB|^2 \quad (\text{eig. hoogtelijn in gelijkbenige } \Delta) \\ 16 + 6,25 &= |AB|^2 \\ 22,25 &= |AB|^2 \\ \sqrt{22,25} &= |AB| \end{aligned}$$

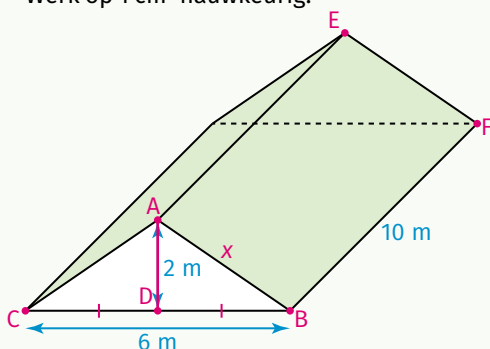
Antwoord: De lengte van één van de benen is $\sqrt{22,25}$ cm.

>>> Verder oefenen: D16 t.e.m. D37

5

Het dak op een schuur (met lengte 10 m en breedte 6 m) is symmetrisch. Bereken de totale oppervlakte van de schuine hellingen van het dak.

Werk op 1 cm² nauwkeurig.



$$\begin{aligned} |AD|^2 + |BD|^2 &= |AB|^2 \\ 2^2 + 3^2 &= x^2 \quad (\text{eig. hoogtelijn in gelijkbenige } \Delta) \\ 4 + 9 &= x^2 \\ 13 &= x^2 \\ \sqrt{13} &= x \end{aligned}$$

$$A_{\text{rechthoek AEFB}} = \sqrt{13} \cdot 10$$

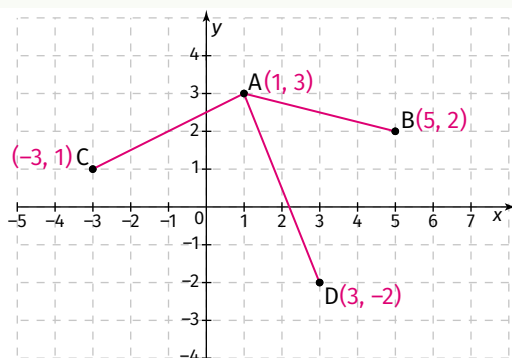
$$\begin{aligned} A_{\text{dak}} &= 2 \cdot \sqrt{13} \cdot 10 \\ &= 20\sqrt{13} \\ &= 72,1110255... \\ &\approx 72,111 \end{aligned}$$

Antwoord: De oppervlakte van het dak is ongeveer 721 110 cm².

>>> Verder oefenen: D38 t.e.m. D45

6

Bepaal $|AB|$, $|AC|$ en $|AD|$.



$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(5-1)^2 + (2-3)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{16+1} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |AC| &= \sqrt{(-3-1)^2 + (1-3)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{16+4} \\ &= \sqrt{20} \\ &= \sqrt{4 \cdot 5} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |AD| &= \sqrt{(3-1)^2 + (-2-3)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{4+25} \\ &= \sqrt{29} \end{aligned}$$

>>> Verder oefenen: D46 t.e.m. D58

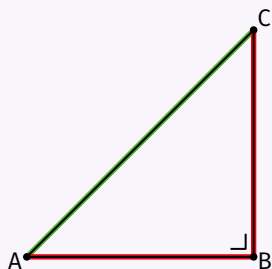


Differentiatietraject

module p. 23

1

Duid de schuine zijde van $\triangle ABC$ **in het groen** aan op de figuur.
Duid de rechthoekszijden van $\triangle ABC$ **in het rood** aan op de figuur.

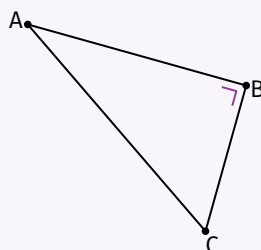


2

Formuleer de stelling van Pythagoras in symbolen toegepast op de gegeven driehoek.



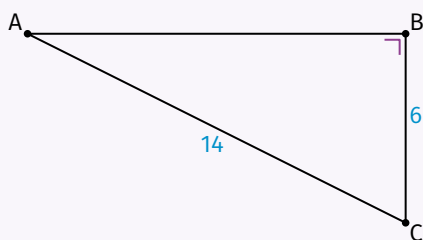
TIP Benoem eerst de zijden.



$$b^2 = a^2 + c^2$$

3

- a) Bekijk de rechthoekige $\triangle ABC$ en vul aan.
- De schuine zijde is
 - De rechthoekszijden zijn ... en
- b) Bepaal $|AB|$ op twee decimalen nauwkeurig.

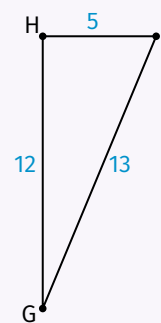
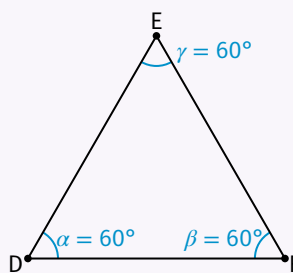
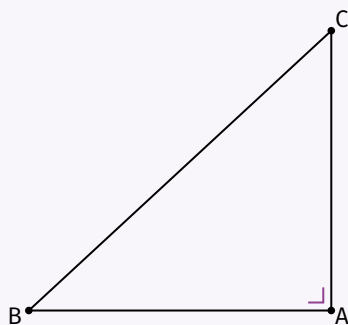


- a) • $[AC]$
• $[AB]$ en $[BC]$

b) $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$
 $|AB|^2 + 6^2 = 14^2$
 $|AB|^2 + 36 = 196$
 $|AB|^2 = 196 - 36$
 $|AB|^2 = 160$
 $|AB| = \sqrt{160}$
 $|AB| \approx 12,65$

4

Voor welke driehoek(-en) geldt de stelling van Pythagoras?



Voor $\triangle ABC$ en $\triangle HIG$ geldt de stelling van Pythagoras.

- $\triangle ABC$ is rechthoekig in $\hat{A}$
- $\triangle HIG$ is rechthoekig in $\hat{H}$, want $13^2 = 12^2 + 5^2$



5

Enkele leerlingen uit de klas 3A formuleren de stelling van Pythagoras bij deze driehoek ABC. Wie noteert de stelling van Pythagoras juist?

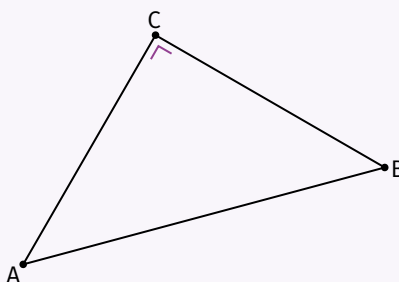
Nena: $a^2 + b^2 = c^2$

Sien: $|AC|^2 + |AB|^2 = |BC|^2$

Joshua: $|AC|^2 = |AB|^2 - |BC|^2$

Hannah: $c^2 - a^2 = b^2$

Maxim: $b = \sqrt{a^2 - c^2}$



$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ of } |BC|^2 + |AC|^2 = |AB|^2$$

Antwoord: Nena, Joshua en Hannah noteren de stelling van Pythagoras juist.



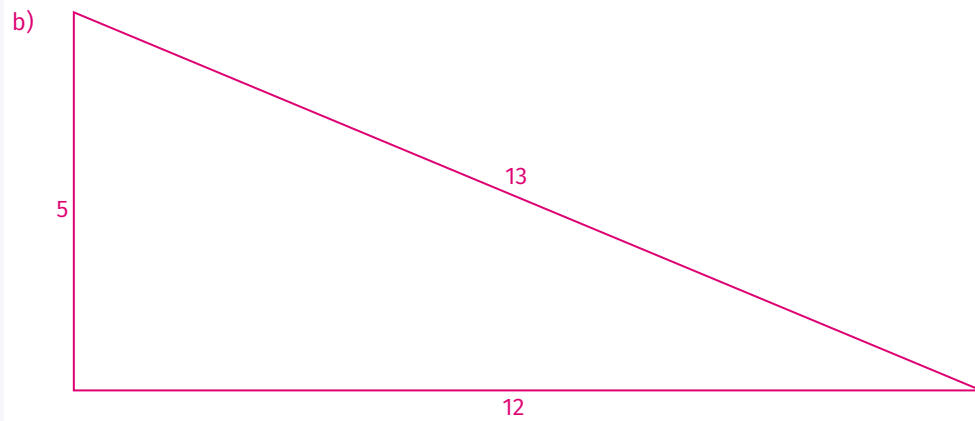
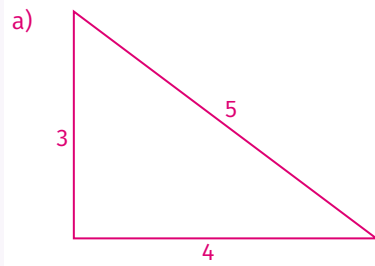
6

Teken een rechthoekige driehoek als je weet dat het volgende verband tussen de zijden geldt:

a) $3^2 + 4^2 = 5^2$

b) $12^2 + 5^2 = 13^2$

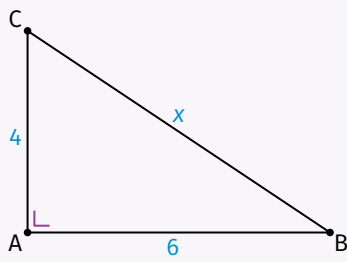
c) $1,2^2 + 3,5^2 = 3,7^2$



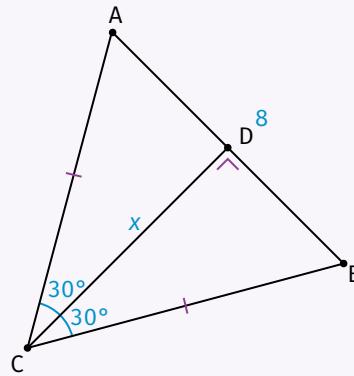
7

Bepaal telkens de lengte van het gevraagde lijnstuk x op twee decimalen nauwkeurig.

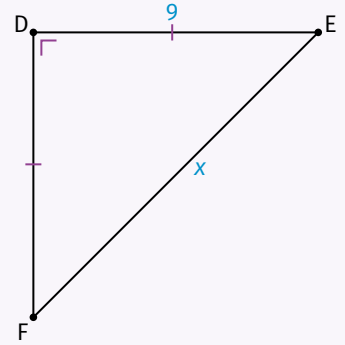
a)



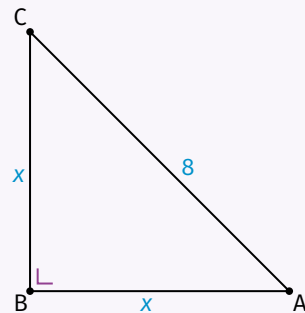
c)



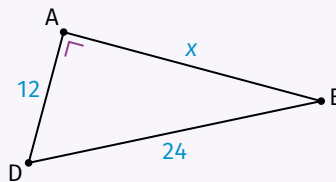
e)



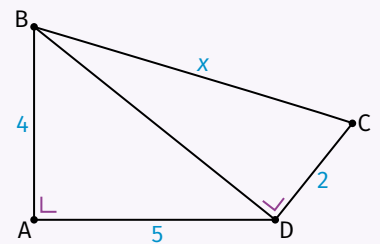
b)



d)



f)



$$\text{a) } |AC|^2 + |AB|^2 = |BC|^2$$

$$4^2 + 6^2 = x^2$$

$$16 + 36 = x^2$$

$$52 = x^2$$

$$\sqrt{52} = x$$

$$\sqrt{4 \cdot 13} = x$$

$$2\sqrt{13} = x$$

$$7,21 \approx x$$

$$\text{c) } |AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2$$

$$8^2 = 4^2 + x^2$$

$$64 = 16 + x^2$$

$$64 - 16 = x^2$$

$$48 = x^2$$

$$\sqrt{48} = x$$

$$\sqrt{16 \cdot 3} = x$$

$$4\sqrt{3} = x$$

$$6,93 \approx x$$

$$\text{e) } |DF|^2 + |DE|^2 = |EF|^2$$

$$9^2 + 9^2 = x^2$$

$$81 + 81 = x^2$$

$$162 = x^2$$

$$\sqrt{162} = x$$

$$\sqrt{81 \cdot 2} = x$$

$$9\sqrt{2} = x$$

$$12,73 \approx x$$

$$\text{b) } |AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$

$$x^2 + x^2 = 8^2$$

$$2x^2 = 64$$

$$x^2 = \frac{64}{2}$$

$$x^2 = 32$$

$$x = \sqrt{32}$$

$$x = \sqrt{2 \cdot 16}$$

$$x = 4\sqrt{2}$$

$$x \approx 5,66$$

$$\text{d) } |AB|^2 + |AD|^2 = |BD|^2$$

$$x^2 + 12^2 = 24^2$$

$$x^2 + 144 = 576$$

$$x^2 = 576 - 144$$

$$x^2 = 432$$

$$x = \sqrt{432}$$

$$x = \sqrt{3 \cdot 144}$$

$$x = 12\sqrt{3}$$

$$x \approx 20,78$$

$$\text{f) } |AB|^2 + |AD|^2 = |BD|^2$$

$$4^2 + 5^2 = |BD|^2$$

$$16 + 25 = |BD|^2$$

$$41 = |BD|^2$$

$$\sqrt{41} = |BD|$$

$$|BD|^2 + |CD|^2 = |BC|^2$$

$$(\sqrt{41})^2 + 2^2 = x^2$$

$$41 + 4 = x^2$$

$$45 = x^2$$

$$\sqrt{45} = x$$

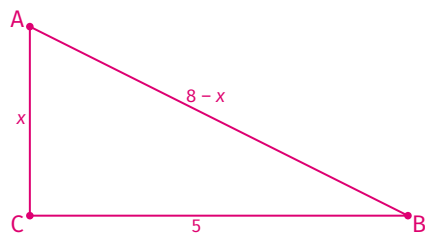
$$\sqrt{9 \cdot 5} = x$$

$$3\sqrt{5} = x$$

$$6,71 \approx x$$



Door een blikseminslag is een 8 meter hoge boom afgeknakt. De top ligt op 5 meter van de wortel. Bereken de lengte van de twee stukken waarin de boom nu verdeeld is.



$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$$

$$x^2 + 5^2 = (8 - x)^2$$

$$x^2 + 5^2 = 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot x + x^2$$

$$x^2 + 25 = 64 - 16x + x^2$$

$$x^2 - x^2 + 16x = 64 - 25$$

$$16x = 39$$

$$x = \frac{39}{16}$$

$$x = 2,4375$$

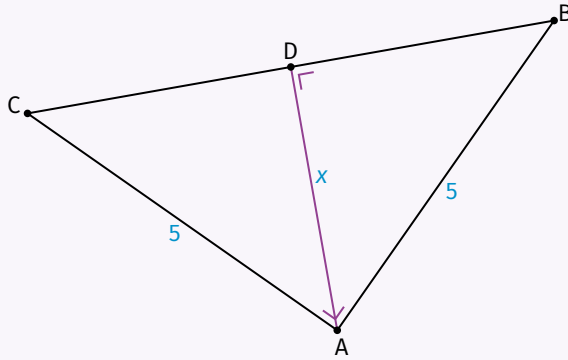
Antwoord: De boom is afgeknakt in een stuk van 2,4375 m en een stuk van 5,5625 m.



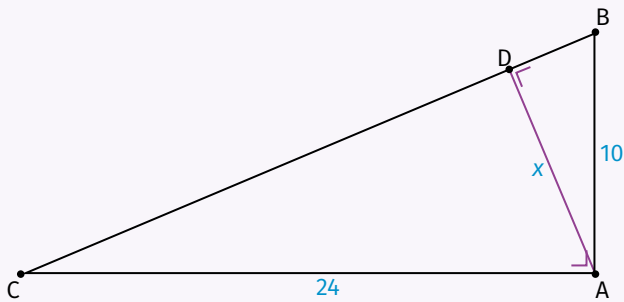
9

Bepaal telkens de lengte x van het gekleurde lijnstuk. Rond af op drie decimalen nauwkeurig.

a)



b)

a) In $\triangle ABC$:

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$$

$$5^2 + 5^2 = |BC|^2$$

$$25 + 25 = |BC|^2$$

$$50 = |BC|^2$$

$$\sqrt{50} = |BC|$$

In $\triangle ABD$:

$$|AD|^2 + |BD|^2 = |AB|^2$$

$$x^2 + \left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2 = 5^2 \quad (\text{eig. hoogtelijn gelijkbenige } \triangle)$$

$$x^2 + \frac{50}{4} = 25$$

$$x^2 + \frac{25}{2} = 25$$

$$x^2 = 25 - \frac{25}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{25}{2}}$$

$$x = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$x \approx 3,536$$

b) In $\triangle ABC$:

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$$

$$10^2 + 24^2 = |BC|^2$$

$$100 + 576 = |BC|^2$$

$$676 = |BC|^2$$

$$\sqrt{676} = |BC|$$

$$26 = |BC|$$

In $\triangle ABD$:

$$|DB|^2 + |AD|^2 = |AB|^2$$

$$|DB|^2 + x^2 = 10^2$$

$$x^2 = 100 - |DB|^2 \quad (1)$$

In $\triangle ACD$:

$$|CD|^2 + |AD|^2 = |AC|^2$$

$$|CD|^2 + x^2 = 24^2$$

$$x^2 = 576 - |CD|^2 \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt:

$$100 - |DB|^2 = 576 - |CD|^2$$

$$|CD|^2 - |DB|^2 = 476$$

$$(26 - |DB|)^2 - |DB|^2 = 476$$

$$676 - 52|DB| + \cancel{|DB|^2} - \cancel{|DB|^2} = 476$$

$$200 = 52|DB|$$

$$\frac{50}{13} = |DB| \quad (3)$$

(3) en (1):

$$x^2 = 100 - \left(\frac{50}{13}\right)^2$$

$$x^2 = 100 - \frac{2500}{169}$$

$$x^2 = \frac{14\,400}{169}$$

$$x = \sqrt{\frac{14\,400}{169}}$$

$$x = \frac{120}{13}$$

$$x \approx 9,231$$



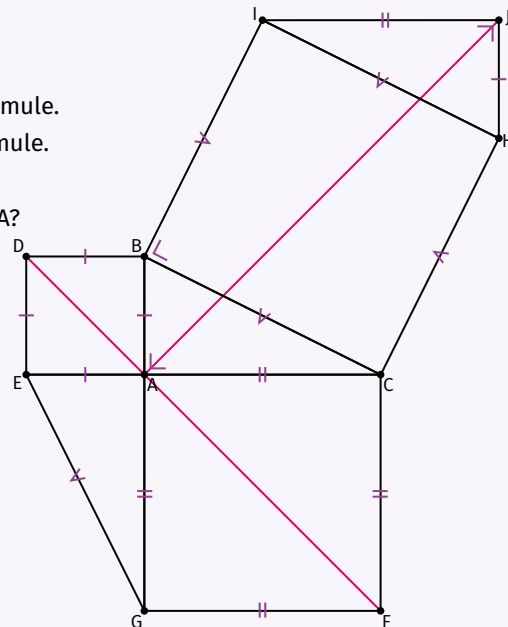
De stelling van Pythagoras is één van meest bewezen stellingen uit de meetkunde. Er zijn wel meer dan 350 verschillende bewijzen opgesteld. Hieronder vind je er enkele. Kan jij ze bewijzen?

a) **Bewijs van Bhāskara**

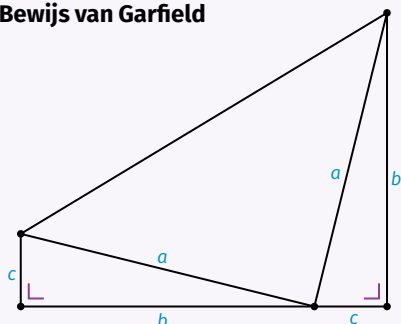
Maak met vier congruente rechthoekige driehoeken een vierkant met een zijde die even lang is als de hypotenusa van de driehoeken. Gebruik de vier identieke rechthoekige driehoeken uit de bijlage (achteraan deze module). Toon aan dat $b^2 = a^2 + c^2$.

b) **Bewijs van Leonardo da Vinci**

- Wat stel je vast bij $\triangle ABC$, $\triangle AGE$ en $\triangle IJH$?
- Druk de oppervlakte van zeshoek BCFGED uit met een formule.
- Druk de oppervlakte van zeshoek ABIJHC uit met een formule.
- Teken $[DF]$ en $[AJ]$.
- Wat stel je vast bij de vierhoeken FGED, DBCF, ABIJ en JHCA?
- Toon aan dat $a^2 = b^2 + c^2$.



c) **Bewijs van Garfield**



Toon aan dat $a^2 = b^2 + c^2$.



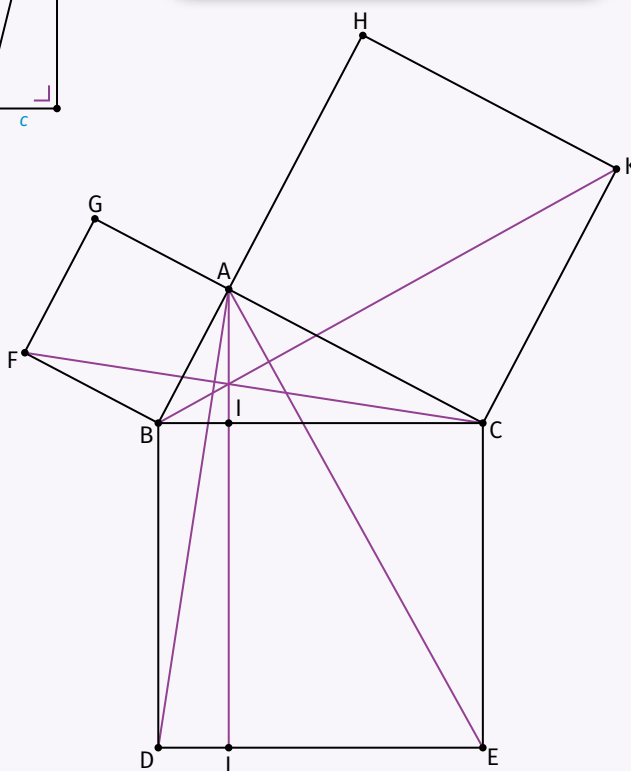
TIP Stel de oppervlakte van het trapezium gelijk aan de som van de oppervlakte van de drie driehoeken

d) **Bewijs van Euclides**

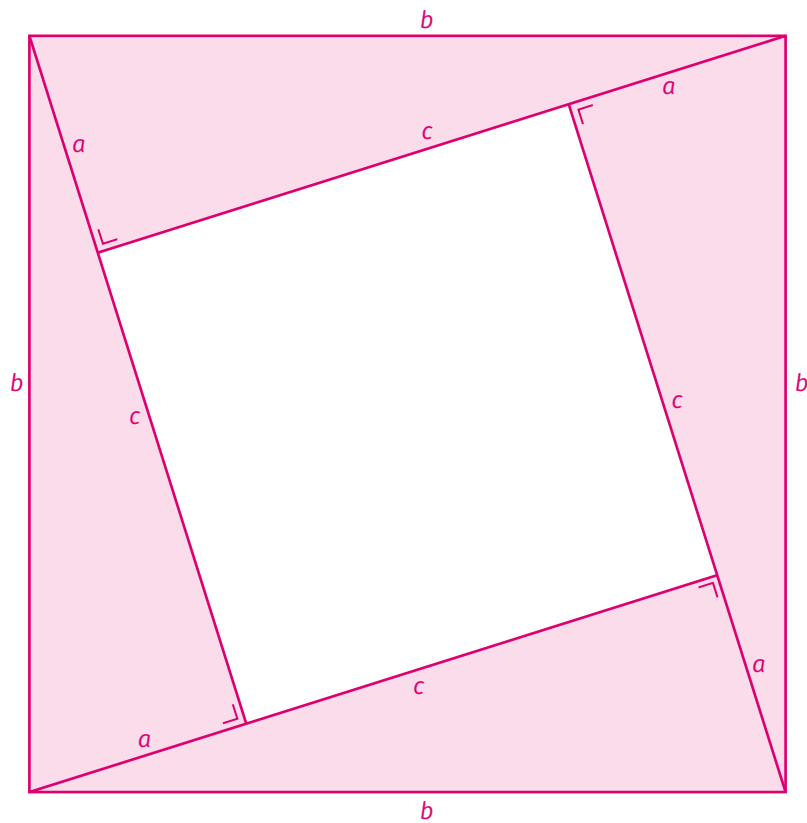
Gegeven: $\triangle ABC$ met $\hat{A} = 90^\circ$

Bewijs $A_{ABFG} = A_{BILD}$.

Bewijs $A_{AHKC} = A_{CELI}$.



a)



$$A_{\text{groot vierkant}} = b^2$$

$$\begin{aligned} A_{\text{klein vierkant}} &= (c - a)^2 \\ &= c^2 - 2ac + a^2 \end{aligned}$$

$$A_{\text{driehoek}} = \frac{ac}{2}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{groot vierkant}} &= A_{\text{klein vierkant}} + 4 \cdot A_{\text{driehoek}} \\ b^2 &= c^2 - 2ac + a^2 + 4 \cdot \frac{ac}{2} \\ b^2 &= c^2 - 2ac + a^2 + 2ac \\ b^2 &= c^2 + a^2 \end{aligned}$$

b) • De driehoeken zijn congruent.

In $\triangle ABC$ en $\triangle AEG$:

$$\left. \begin{array}{l} |AB| = |AE| \text{ (gegeven)} \\ |AC| = |AG| \text{ (gegeven)} \\ |BC| = |EG| \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \xRightarrow{ZZZ} \triangle ABC \cong \triangle AEG$$

Analoog kan je bewijzen dat $\triangle ABC \cong \triangle JHI$, dus ook $\triangle AEG \cong \triangle JHI$.

• $A_{BCFGED} = A_{\triangle ABC} + A_{ACFG} + A_{\triangle AGE} + A_{EDBA}$

• $A_{ABIJHC} = A_{\triangle ABC} + A_{BIHC} + A_{\triangle IJH}$

• zie tekening

• De vierhoeken zijn congruent dus: $A_{BCFGED} = A_{ABIJHC}$

$$\begin{aligned} A_{BCFGED} &= A_{ABIJHC} \\ \frac{bc}{2} + b^2 + \frac{bc}{2} + c^2 &= \frac{bc}{2} + a^2 + \frac{bc}{2} \\ b^2 + c^2 + \cancel{bc} &= a^2 + \cancel{bc} \\ b^2 + c^2 &= a^2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} A_{\text{trapezium}} &= \frac{(b+c) \cdot (b+c)}{2} \\ &= \frac{(b+c)^2}{2} \\ &= \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2} \end{aligned}$$

$$A_{\text{driehoek 1}} = \frac{b \cdot c}{2}$$

$$A_{\text{driehoek 2}} = \frac{b \cdot c}{2}$$

$$A_{\text{driehoek 3}} = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{trapezium}} &= A_{\text{driehoek 1}} + A_{\text{driehoek 2}} + A_{\text{driehoek 3}} \\ \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2} &= \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2} \\ b^2 + 2bc + c^2 &= bc + bc + a^2 \\ b^2 + 2bc + c^2 &= 2bc + a^2 \\ b^2 + c^2 &= a^2 \end{aligned}$$

$$d) \cdot \left. \begin{aligned} A_{ABFG} &= |BF|^2 \\ A_{\Delta CBF} &= \frac{|BF| \cdot |AB|}{2} = \frac{|BF|^2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{ABFG} = 2 \cdot A_{\Delta CBF}$$

$$\left. \begin{aligned} A_{BILD} &= |BD| \cdot |BI| \\ A_{\Delta ABD} &= \frac{|BD| \cdot |BI|}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{BILD} = 2 \cdot A_{\Delta ABD}$$

In ΔCBF en ΔABD geldt:

$$\left. \begin{aligned} |BC| &= |BD| \quad (\text{gelijke zijden in een vierkant}) \\ \widehat{FBC} &= \widehat{ABD} \quad (\widehat{FBA} = 90^\circ, \widehat{DBC} = 90^\circ \text{ en } \widehat{ABC} \text{ is gemeenschappelijk}) \\ |BF| &= |BA| \quad (\text{gelijke zijden in een vierkant}) \end{aligned} \right\} \xRightarrow{\text{ZH}} \Delta CBF \cong \Delta DBA$$

Dus: $A_{ABFG} = A_{BILD}$

$$\cdot \left. \begin{aligned} A_{AHKC} &= |KC|^2 \\ A_{\Delta KCB} &= \frac{|KC| \cdot |AC|}{2} = \frac{|KC|^2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{AHKC} = 2 \cdot A_{\Delta KCB}$$

$$\left. \begin{aligned} A_{CELI} &= |CE| \cdot |IC| \\ A_{\Delta ACE} &= \frac{|CE| \cdot |IC|}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{CELI} = 2 \cdot A_{\Delta ACE}$$

In ΔKCB en ΔACE geldt:

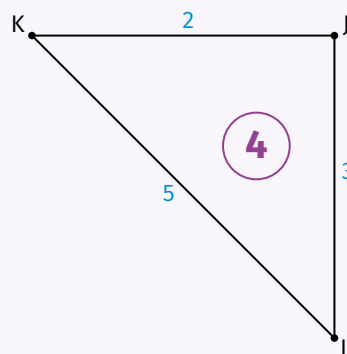
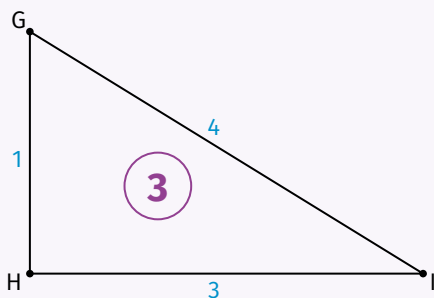
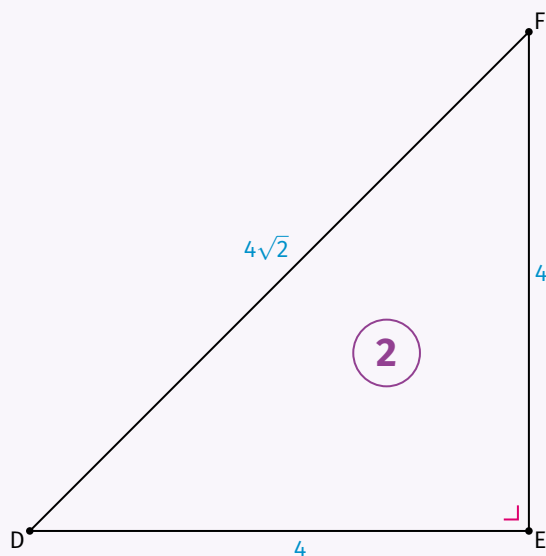
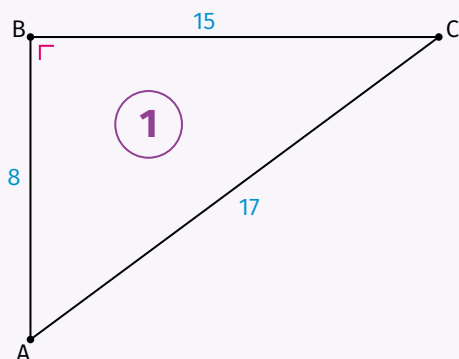
$$\left. \begin{aligned} |CB| &= |CE| \quad (\text{gelijke zijden in een vierkant}) \\ \widehat{BCK} &= \widehat{ECA} \quad (\widehat{ACK} = 90^\circ, \widehat{BCE} = 90^\circ \text{ en } \widehat{BCA} \text{ is gemeenschappelijk}) \\ |CK| &= |CA| \quad (\text{gelijke zijden in een vierkant}) \end{aligned} \right\} \xRightarrow{\text{ZH}} \Delta KCB \cong \Delta ACE$$

Dus: $A_{AHKC} = A_{CELI}$



11

Welke driehoeken zijn rechthoekig? Duid de rechte hoek aan van de rechthoekige driehoek(en).



$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad |AB|^2 + |BC|^2 &= 8^2 + 15^2 & |AC|^2 &= 17^2 \\ &= 64 + 225 & &= 289 \\ &= 289 \end{aligned}$$

$\triangle ABC$ is rechthoekig in $\hat{B}$.

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad |EF|^2 + |DE|^2 &= 4^2 + 4^2 & |DF|^2 &= (4\sqrt{2})^2 \\ &= 16 + 16 & &= 16 \cdot 2 \\ &= 32 & &= 32 \end{aligned}$$

$\triangle DEF$ is rechthoekig in $\hat{E}$.

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad |GH|^2 + |HI|^2 &= 1^2 + 3^2 & |GI|^2 &= 4^2 \\ &= 1 + 9 & &= 16 \\ &= 10 \end{aligned}$$

$\triangle GHI$ is niet rechthoekig.

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad |JK|^2 + |JL|^2 &= 2^2 + 3^2 & |KL|^2 &= 5^2 \\ &= 4 + 9 & &= 25 \\ &= 13 \end{aligned}$$

$\triangle KJL$ is niet rechthoekig.

12

Kleur de lengte van de zijden die samen een rechthoekige driehoek vormen in eenzelfde kleur.

2,5	4	15	1,3
5	8,4	2,4	12
0,7	9	3	8,5



13

Gegeven: $\triangle ABC$ met $|AB| = 21$ cm, $|AC| = 28$ cm en $|BC| = 35$ cm.

Gevraagd:

- Is deze driehoek rechthoekig? Toon aan.
- Welke zijde is de schuine zijde?
- Welke hoek is 90° ?

$$\begin{aligned}
 \text{a) } |AB|^2 + |AC|^2 &= 21^2 + 28^2 & |BC|^2 &= 35^2 \\
 &= 441 + 784 & &= 1225 \\
 &= 1225
 \end{aligned}$$

$\triangle ABC$ is rechthoekig.

b) $[BC]$

c) $\hat{A}$

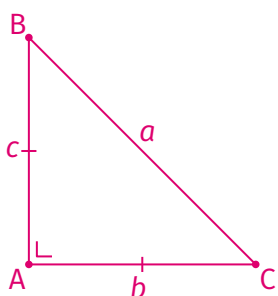


14

Toon aan dat de schuine zijde van een gelijkbenige rechthoekige driehoek steeds een veelvoud is van $\sqrt{2}$.



TIP Maak een schets.



$$\begin{aligned}
 b^2 + c^2 &= a^2 \\
 \text{of } b^2 + b^2 &= a^2 \\
 2b^2 &= a^2 \\
 \sqrt{2b^2} &= a \\
 \sqrt{2}b &= a
 \end{aligned}$$



Een pythagorees drietal bestaat uit drie gehele getallen a , b , en c waarvoor geldt dat $a^2 + b^2 = c^2$. Die drie gehele getallen vormen dus steeds de zijden van een rechthoekige driehoek.

Enkele voorbeelden:

a	b	c
3	4	5
5	12	13
10	24	26

- a) Geef nog een voorbeeld van zo'n drietal. Zijn er meerdere mogelijkheden?
- b) Verklaar: Als a , b en c een pythagorees drietal is, dan is ka , kb en kc met $k \in \mathbb{N}_0$ ook een pythagorees drietal.
- c) Welk pythagorees drietal kan je vormen als één van de rechthoekszijden 7 is?

a) Bv. 6, 8 en 10. Er zijn meerdere mogelijkheden.

$$b) (ka)^2 + (kb)^2 = (kc)^2$$

$$k^2 a^2 + k^2 b^2 = k^2 c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$c) 7^2 + b^2 = c^2$$

$$49 = c^2 - b^2$$

$$49 = (c - b)(c + b)$$

$$\begin{cases} 49 = c + b \\ 1 = c - b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 49 - b = c & (1) \\ 1 = c - b & (2) \end{cases}$$

$$1 = 49 - b - b \quad (1) \text{ in } (2)$$

$$1 = 49 - 2b$$

$$1 - 49 = -2b$$

$$-48 = -2b$$

$$\frac{-48}{-2} = b$$

$$24 = b \quad (3)$$

$$49 - 24 = c \quad (3) \text{ in } (1)$$

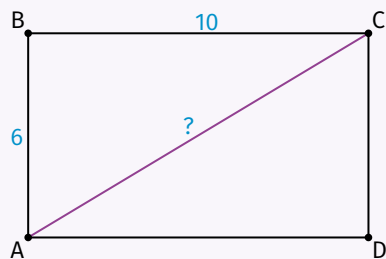
$$25 = c$$

Antwoord: Je kan het pythagorees drietal 7, 24 en 25 vormen.



16

Bereken de lengte van de diagonaal van de rechthoek.



$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$

$$6^2 + 10^2 = |AC|^2$$

$$36 + 100 = |AC|^2$$

$$136 = |AC|^2$$

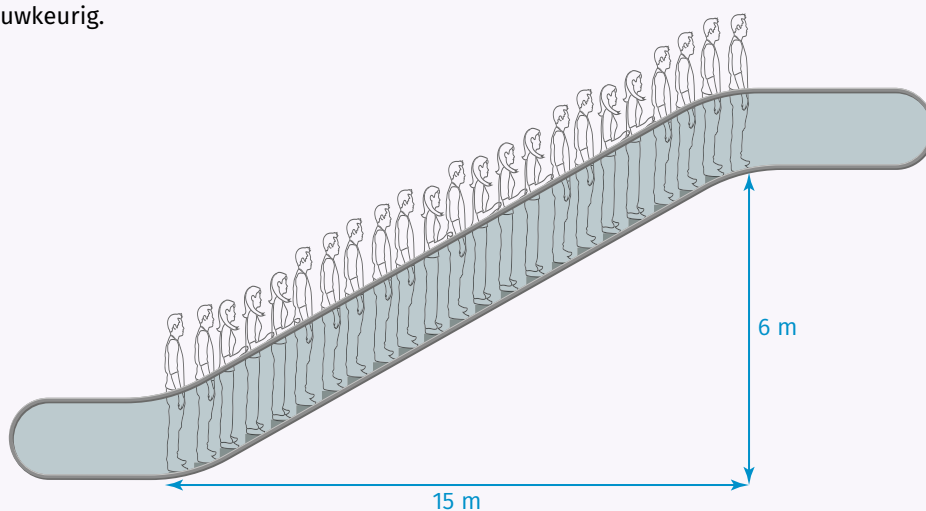
$$\sqrt{136} = |AC|$$

$$\sqrt{4 \cdot 34} = |AC|$$

$$2\sqrt{34} = |AC|$$

17

Als er tijdens de ochtendspits een trein in het station Brussel-Centraal aankomt, dan is elke trede van de roltrap bezet. Bepaal de afstand tussen de eerste en de laatste persoon op de roltrap. Bereken je uitkomst op 1 cm nauwkeurig.



$$\sqrt{(6 \text{ m})^2 + (15 \text{ m})^2} = \sqrt{36 \text{ m}^2 + 225 \text{ m}^2}$$

$$= \sqrt{261 \text{ m}^2}$$

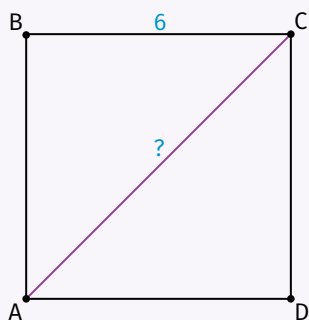
$$= \sqrt{261} \text{ m}$$

$$\approx 16,16 \text{ m}$$

Antwoord: De afstand tussen de eerste en de laatste persoon is ongeveer 1616 cm.

18

Bereken de lengte van de diagonaal van onderstaand vierkant.



$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$

$$6^2 + 6^2 = |AC|^2$$

$$36 + 36 = |AC|^2$$

$$72 = |AC|^2$$

$$\sqrt{72} = |AC|$$

$$\sqrt{36 \cdot 2} = |AC|$$

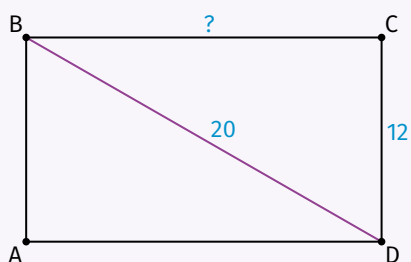
$$6\sqrt{2} = |AC|$$



module p. 30

19

Bereken de lengte van de rechthoek.



$$|BC|^2 + |CD|^2 = |BD|^2$$

$$|BC|^2 + 12^2 = 20^2$$

$$|BC|^2 + 144 = 400$$

$$|BC|^2 = 400 - 144$$

$$|BC|^2 = 256$$

$$|BC| = \sqrt{256}$$

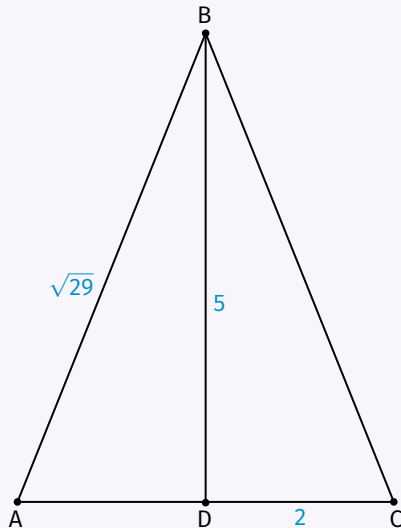
$$|BC| = 16$$



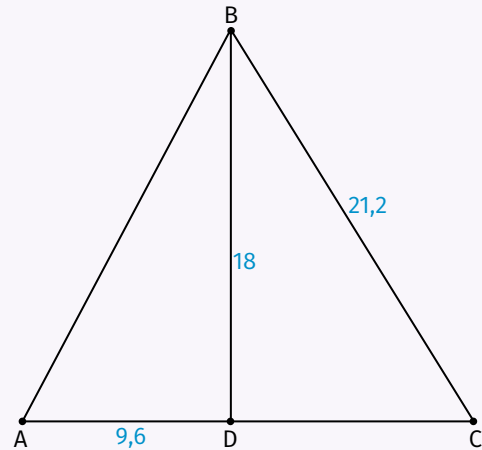
20

Is de driehoek ABC gelijkbenig? Toon aan met een berekening.

a)



b)



$$a) |BC|^2 = |BD|^2 + |DC|^2$$

$$|BC|^2 = 5^2 + 2^2$$

$$|BC|^2 = 29$$

$$|BC| = \sqrt{29}$$

$$|AB| = |BC|$$

$\Rightarrow \triangle ABC$ is gelijkbenig

$$b) |AB|^2 = |AD|^2 + |DB|^2$$

$$|AB|^2 = 9,6^2 + 18^2$$

$$|AB|^2 = 416,16$$

$$|AB| = \sqrt{416,16}$$

$$|AB| = 20,4$$

$$|AB| \neq |BC| = 21,2 \text{ en } |AB| \neq |AC| = 20,8$$

$\Rightarrow \triangle ABC$ is niet gelijkbenig

$$|BD|^2 + |DC|^2 = |BC|^2$$

$$18^2 + |DC|^2 = 21,2^2$$

$$324 + |DC|^2 = 449,44$$

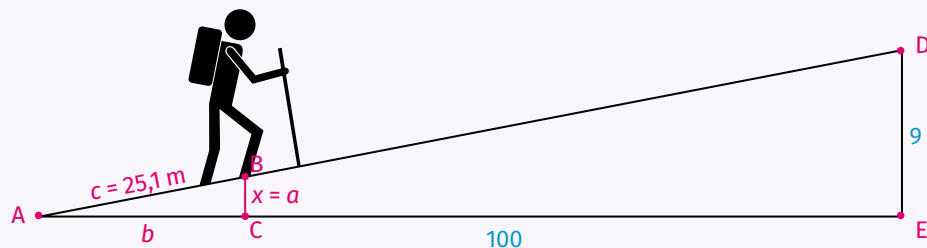
$$|DC|^2 = 125,44$$

$$|DC| = \sqrt{125,44}$$

$$|DC| = 11,2$$

21

Pieter legt een afstand van 25,1 meter af op een helling met een stijgingspercentage van 9%. Hoeveel centimeter hoger bevindt Pieter zich na het wandelen van deze afstand?



$$|AD| = \sqrt{|AE|^2 + |DE|^2} = \sqrt{100^2 + 9^2} = \sqrt{10\,081}$$

$$\triangle ABE \sim \triangle ADE \begin{matrix} \text{HH} \\ \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{C} = 90^\circ = \hat{E} \end{matrix} \quad (\text{gemeenschappelijke hoek})$$

$$\Rightarrow \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|} \left(= \frac{|AC|}{|AE|} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{25,1}{\sqrt{10\,081}} = \frac{x}{9}$$

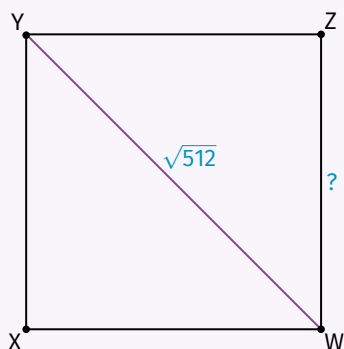
$$\Rightarrow 25,1 \cdot 9 = \sqrt{10\,081} \cdot x$$

$$\Rightarrow x = \frac{25,1 \cdot 9}{\sqrt{10\,081}} = \frac{225,9}{\sqrt{10\,081}} \approx 2,25$$

Antwoord: Pieter bevindt zich dan 225 cm hoger.

22

Bereken de zijde van het vierkant als je weet dat de diagonaal van het vierkant $\sqrt{512}$ cm is.



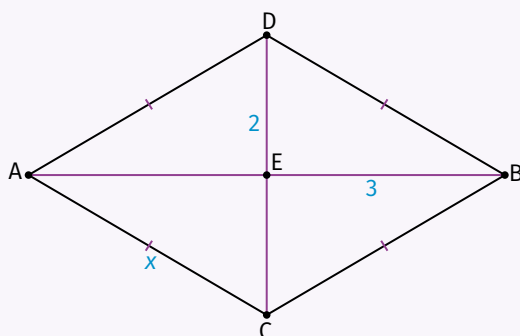
$$\begin{aligned} |YZ|^2 + |ZW|^2 &= |YW|^2 \\ |YZ|^2 + |YZ|^2 &= (\sqrt{512})^2 \\ 2|YZ|^2 &= 512 \\ |YZ|^2 &= \frac{512}{2} \\ |YZ|^2 &= 256 \\ |YZ| &= \sqrt{256} \\ |YZ| &= 16 \end{aligned}$$

Antwoord: De zijde van het vierkant is 16 cm.



23

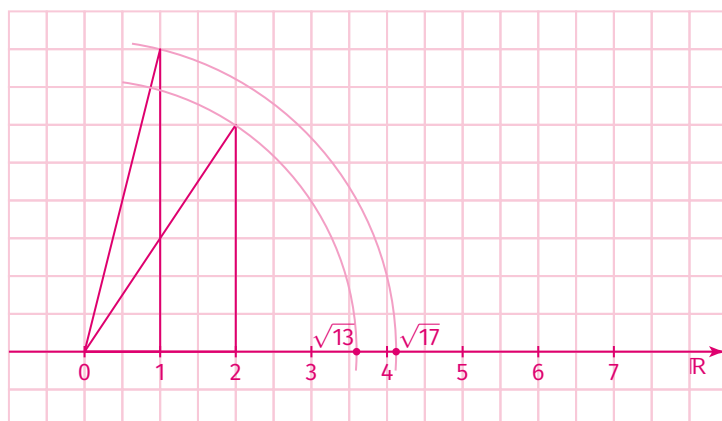
Bereken de lengte van het gevraagde lijnstuk x op twee decimalen nauwkeurig.



$$\begin{aligned} |DE|^2 + |BE|^2 &= |BD|^2 \\ 2^2 + 3^2 &= |BD|^2 \\ 4 + 9 &= |BD|^2 \\ 13 &= |BD|^2 \\ \sqrt{13} &= |BD| \\ x &= \sqrt{13} \quad (|BD| = |AC|) \\ x &\approx 3,61 \end{aligned}$$

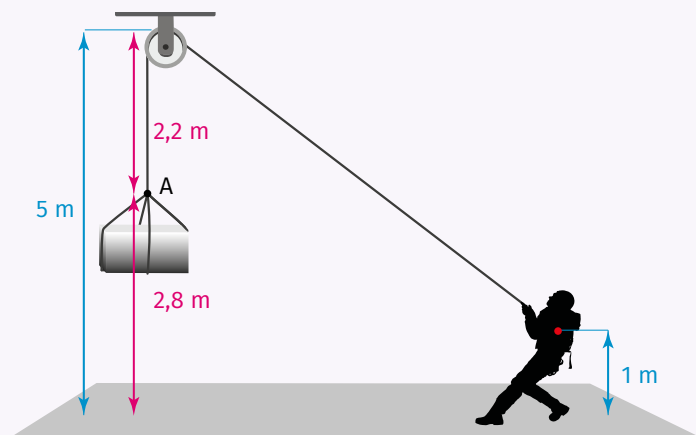


24

Plaats $\sqrt{13}$ en $\sqrt{17}$ op dezelfde getallenas.

25

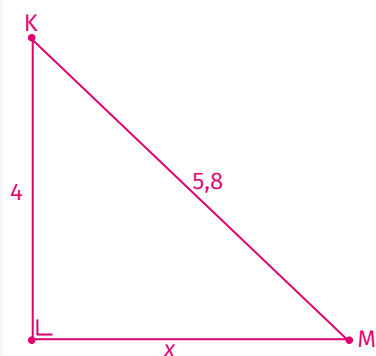
Een man trekt met behulp van een touw een kist op. Het touw is 14 meter lang. Om de kist aan het touw vast te maken, gebruikt hij 6 m van dat touw. Hoe ver bevindt de man zich van de kist, als punt A zich op 2,8 meter boven de grond bevindt?



TIP

Maak een tekening van de rechthoekige driehoek waarop je de stelling van Pythagoras kan toepassen.

- We bepalen de lengte van het touw tussen de katrol en de man:
 $8 \text{ m} - 2,2 \text{ m} = 5,8 \text{ m}$



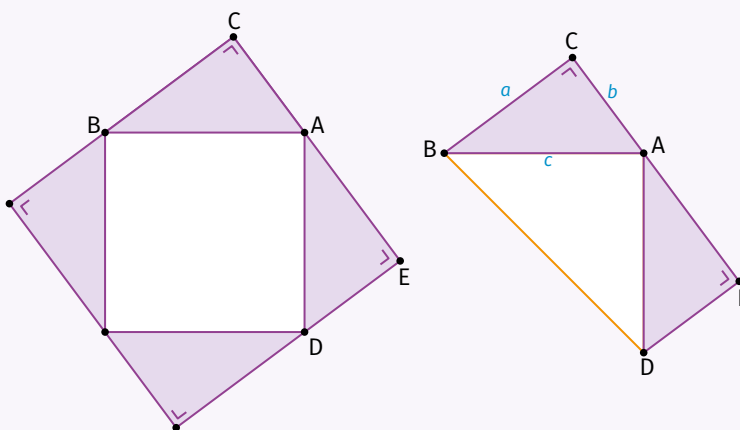
$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{(5,8 \text{ m})^2 - (4 \text{ m})^2} \\
 &= \sqrt{33,64 \text{ m}^2 - 16 \text{ m}^2} \\
 &= \sqrt{17,64 \text{ m}^2} \\
 &= 4,2 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Antwoord: De man bevindt zich op 4,2 m van de kist.



Bewijs de stelling van Pythagoras op de manier van Garfield.

Uit een vierkant gemaakt met vier congruente rechthoekige driehoeken werd een trapezium gevormd op de manier zoals op de tekening.



Bereken de oppervlakte van het trapezium BCDE op twee verschillende wijzen. Bewijs op die manier de stelling van Pythagoras.

We berekenen de oppervlakte van trapezium BCDE op twee verschillende wijzen.

Methode 1:

$$A_{BCED} = A_{\triangle ABC} + A_{\triangle ADE} + A_{\triangle ADB}$$

$$A_{BCED} = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$$

$$A_{BCED} = ab + \frac{1}{2}c^2$$

$$A_{BCED} = \frac{2ab + c^2}{2}$$

Methode 2:

Het trapezium BCDE (met evenwijdige zijden [BC] en [DE]), heeft als

- kleine basis $|ED| = b$
- grote basis $|BC| = a$
- hoogte $|CE| = a + b$

Via de oppervlakteformule van een trapezium bekom je

$$A_{BCED} = \frac{b+a}{2}(a+b) = \frac{(a+b)^2}{2}$$

Gelijkstelling van beide oppervlaktes:

$$(a+b)^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

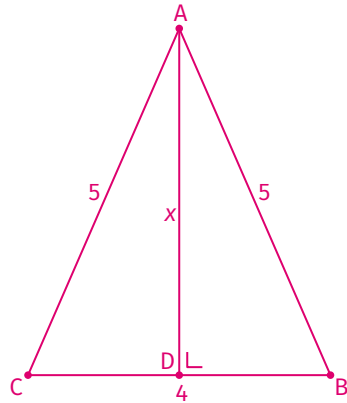


27

In een gelijkbenige driehoek ABC is de basis 4 cm en zijn de benen 5 cm. Bereken de hoogte van de driehoek op 0,01 cm nauwkeurig.



TIP Maak eerst een schets.



$$\begin{aligned} |AD|^2 + |BD|^2 &= |AB|^2 \\ x^2 + 2^2 &= 5^2 \quad (\text{eig. hoogtelijn in een gelijkbenige } \Delta) \\ x^2 + 4 &= 25 \\ x^2 &= 25 - 4 \\ x^2 &= 21 \\ x &= \sqrt{21} \\ x &\approx 4,58 \end{aligned}$$

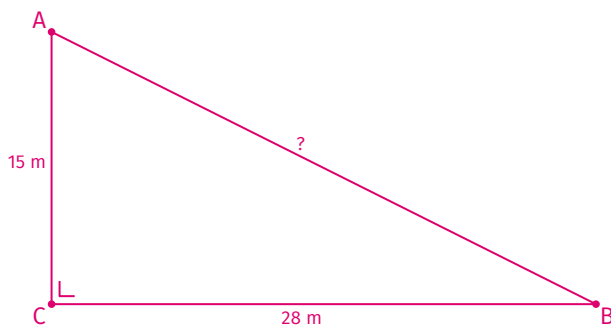
Antwoord: De hoogte van de driehoek is ongeveer 4,58 cm.



28

Een basketbalveld is 15 meter breed en 28 meter lang.

Wat is de grootste afstand die je in een rechte lijn op dit veld kunt afleggen?



$$\begin{aligned} |AC|^2 + |BC|^2 &= |AB|^2 \\ 15^2 + 28^2 &= |AB|^2 \\ 225 + 784 &= |AB|^2 \\ 1009 &= |AB|^2 \\ \sqrt{1009} &= |AB| \\ |AB| &\approx 31,76 \end{aligned}$$

Antwoord: De grootste afstand die je in een rechte lijn kunt afleggen op dit veld is ongeveer 31,76 m.



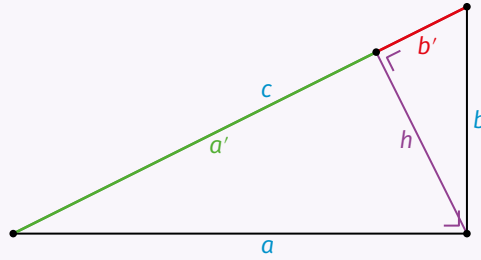
In een rechthoekige driehoek verdeelt de hoogtelijn uit de rechte hoek de schuine zijde in twee lijnstukken zoals in de figuur. Er bestaan enkele verbanden tussen de lengtes van die lijnstukken:

$$a \cdot b = c \cdot h$$

$$b^2 = c \cdot b'$$

$$a^2 = c \cdot a'$$

$$h^2 = b' \cdot a'$$



Deze verbanden worden ook wel de metrische betrekkingen in een rechthoekige driehoek genoemd. Bewijs de stelling van Pythagoras met behulp van deze metrische betrekkingen.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c \cdot a' + c \cdot b' && \text{(gegeven)} \\ &= c(a' + b') && \\ &= c \cdot c && \text{(tekening)} \\ &= c^2 \end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned} a^2 &= c \cdot a' && \text{(gegeven)} \\ &= (a' + b') \cdot a' && \text{(tekening)} \\ &= a'^2 + a'b' && (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= c \cdot b' && \text{(gegeven)} \\ &= (a' + b') \cdot b' && \text{(tekening)} \\ &= a'b' + b'^2 && (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= a'^2 + a'b' + a'b' + b'^2 && (1) \text{ en } (2) \\ &= a'^2 + 2a'b' + b'^2 \\ &= (a' + b')^2 \\ &= c^2 && \text{(tekening)} \end{aligned}$$



30

a) Zijn de volgende drietallen pythagorese drietallen?

$\{20, 21, 29\}$

$\{13, 84, 85\}$

$\{5, 12, 17\}$

$\{28, 45, 53\}$

TIP

De verzameling $\{a, b, c\}$ is een pythagorees drietal als $a^2 + b^2 = c^2$.b) Bepaal de waarde van k bij de volgende pythagorese drietallen.

$\{11, k, 61\}$

$\{k, 72, 97\}$

$\{8, 15, k\}$

$\{12, k, k + 2\}$

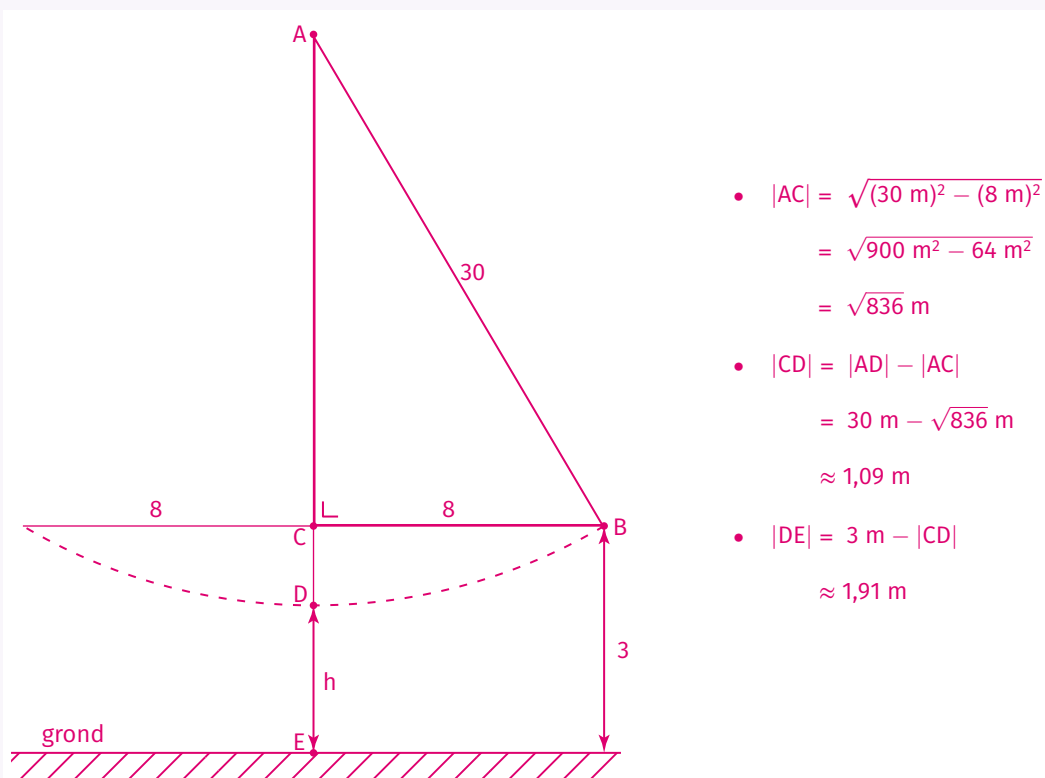
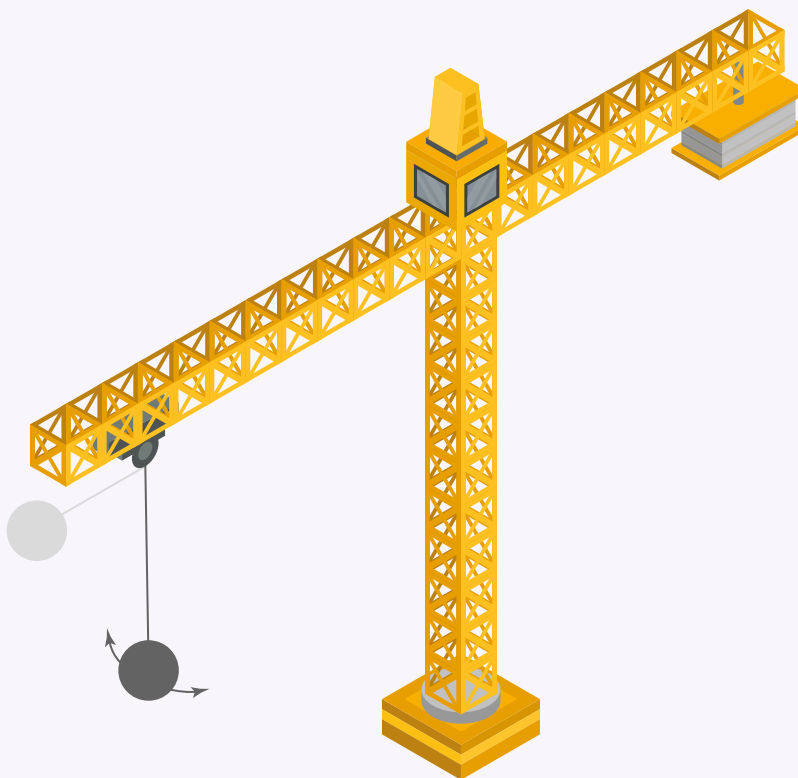
a) $\{20, 21, 29\}$ is een pythagorees drietal want	$20^2 + 21^2 = 841$	en	$29^2 = 841$
$\{5, 12, 17\}$ is geen pythagorees drietal want	$5^2 + 12^2 = 169$	en	$17^2 = 289$
$\{13, 84, 85\}$ is een pythagorees drietal want	$13^2 + 84^2 = 7225$	en	$85^2 = 7225$
$\{28, 45, 53\}$ is een pythagorees drietal want	$28^2 + 45^2 = 2809$	en	$53^2 = 2809$

b) $11^2 + k^2 = 61^2$	$k^2 + 72^2 = 97^2$
$k^2 = 61^2 - 11^2$	$k^2 = 97^2 - 72^2$
$k^2 = 3721 - 121$	$k^2 = 9409 - 5184$
$k^2 = 3600$	$k^2 = 4225$
$k = \sqrt{3600}$	$k = \sqrt{4225}$
$k = 60$	$k = 65$
$8^2 + 15^2 = k^2$	$12^2 + k^2 = (k + 2)^2$
$64 + 225 = k^2$	$144 + k^2 = k^2 + 4k + 4$
$289 = k^2$	$140 = 4k$
$k = \sqrt{289}$	$35 = k$
$k = 17$	



31

Een massa hangt aan een kraan met een kabel van 30 m lang. Als de massa rondslingert (lichtgrijs) en zich op 8 meter van de kabel in rust (donkergrijs) bevindt, hangt de massa 3 meter boven de grond. Bepaal de hoogte van de massa in rust. Rond je resultaat af op 1 cm nauwkeurig.

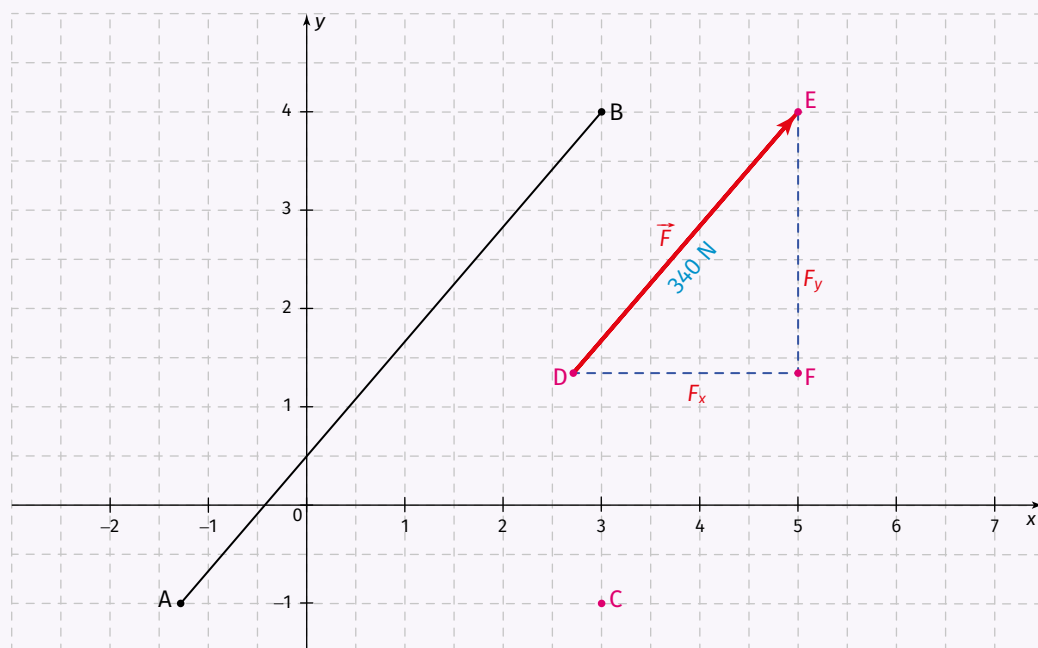


Antwoord: Als de massa in rust is, bevindt het zich ongeveer 1,91 m boven de grond.





Een kracht $\vec{F}$ heeft een grootte van 340 N (newton). De drager van $\vec{F}$ is evenwijdig met de rechte AB. De coördinaat van A is $(-\frac{4}{3}, -1)$. De coördinaat van B is (3, 4). Bepaal de horizontale component F_x en de verticale component F_y van de vector $\vec{F}$.



- In $\triangle ABC$:

$$|AB| = \sqrt{5^2 + \left(\frac{13}{3}\right)^2}$$

$$\approx 6,62$$

- $AB \parallel DE$

$$\Downarrow \quad (\text{stelling van Thales})$$

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|EF|}{|BC|} = \frac{|DF|}{|AC|}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{340 \text{ N}}{6,62} = \frac{F_y}{5} = \frac{F_x}{\frac{13}{3}}$$

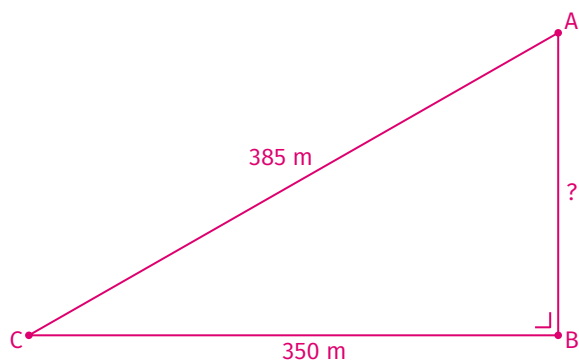
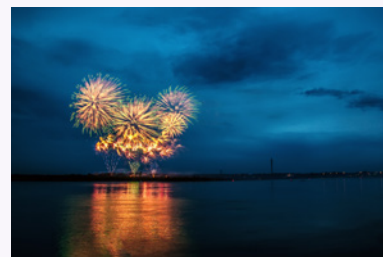
- $F_y = \frac{340 \text{ N} \cdot 5}{6,62}$
- $\approx 256,8 \text{ N}$

- $F_x = \frac{340 \text{ N} \cdot \frac{13}{3}}{6,62}$
- $\approx 222,6 \text{ N}$



33

Tijdens het internationaal vuurwerkfestival in Knokke moeten de bezoekers op minimum 350 meter van de plaats waar het vuurwerk aangestoken wordt staan. Het vuurwerk ontploft dan op 385 meter van de toeschouwers. Op welke hoogte ontploft het vuurwerk? Rond af op 2 decimalen.



$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$

$$|AB|^2 + 350^2 = 385^2$$

$$|AB|^2 + 122\,500 = 148\,225$$

$$|AB| = \sqrt{25\,725}$$

$$|AB| \approx 160,39$$

Antwoord: Het vuurwerk ontploft op ongeveer 160,39 meter hoogte.

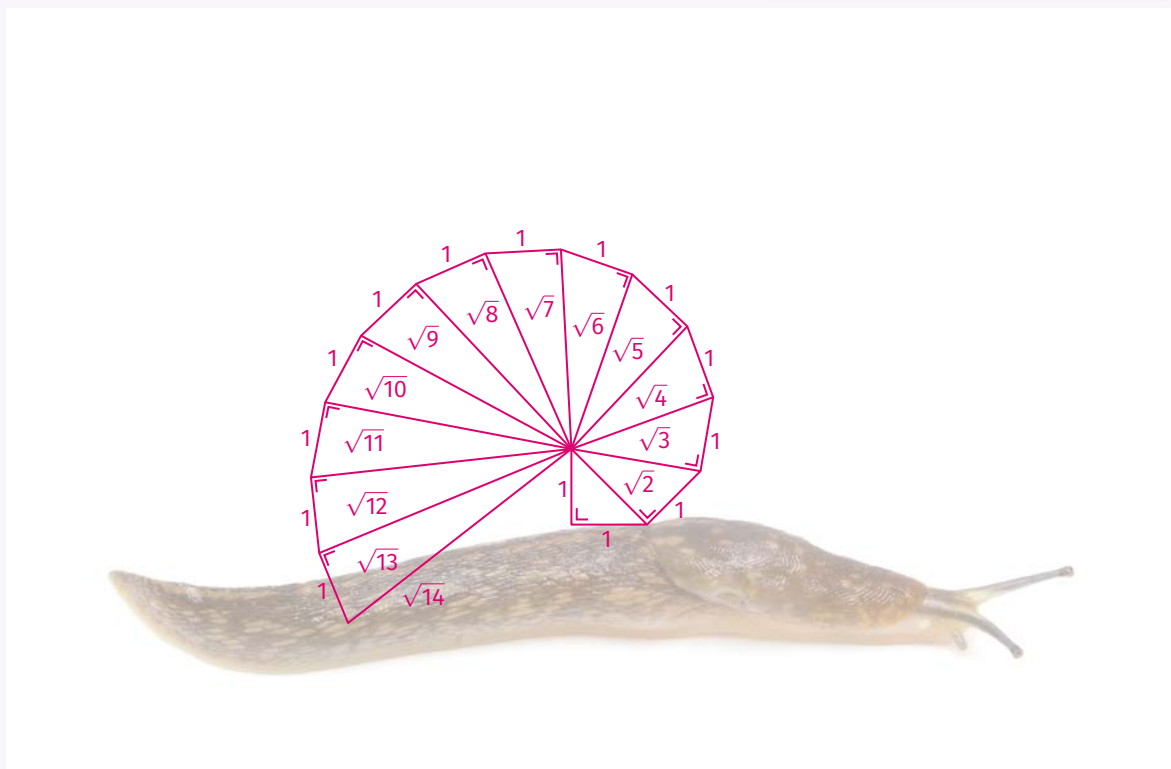


34

Construeer een wortelspiraal zodat de slak een huisje krijgt. Noteer ook telkens de lengte van de schuine zijde.

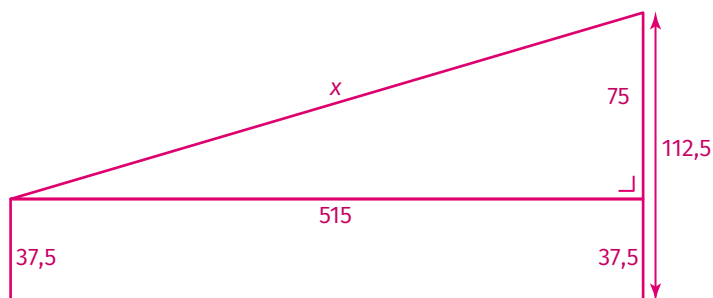
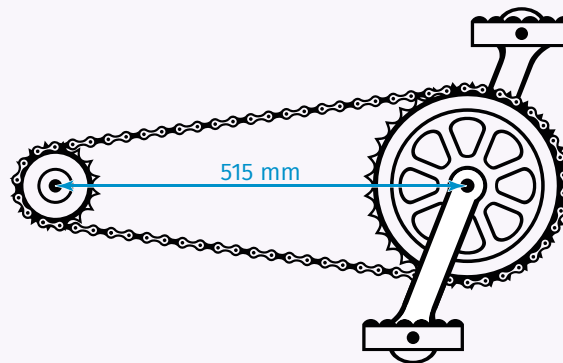


TIP De rechthoekszijden van de eerste rechthoekige driehoek zijn 1.



35

Een fietsketting verbindt twee tandwielen. De horizontale afstand tussen de assen van de tandwielen is 515 mm. Het grote tandwiel heeft een diameter van 225 mm en het kleine tandwiel heeft een diameter van 75 mm. Bereken de lengte van de ketting op 1 mm nauwkeurig.



- $x = \sqrt{75^2 + 515^2}$
 $\approx 520,4$
- De totale lengte van de ketting:

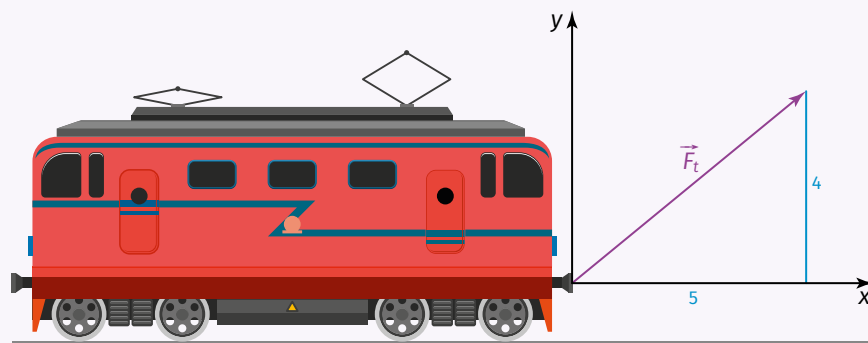
$$2x + \frac{75\pi}{2} + \frac{225\pi}{2} \approx 1512,10$$

Antwoord: De ketting is ongeveer 1512 mm lang.



36

Een treinwagon wordt vooruit getrokken met behulp van een kabel. De wagon ondervindt een trekkraft $\vec{F}_t$ van de kabel. De wagon komt in beweging als de horizontale component van de trekkraft in de kabel 3000 N (newton) bereikt. Hoe groot moet de trekkraft $\vec{F}_t$ op dat moment in de kabel zijn?



- $5 \rightarrow 3000 \text{ N}$
 $1 \rightarrow 600 \text{ N}$
- $\|\vec{F}_t\| = 600 \text{ N} \cdot \sqrt{5^2 + 4^2} \approx 3842 \text{ N}$

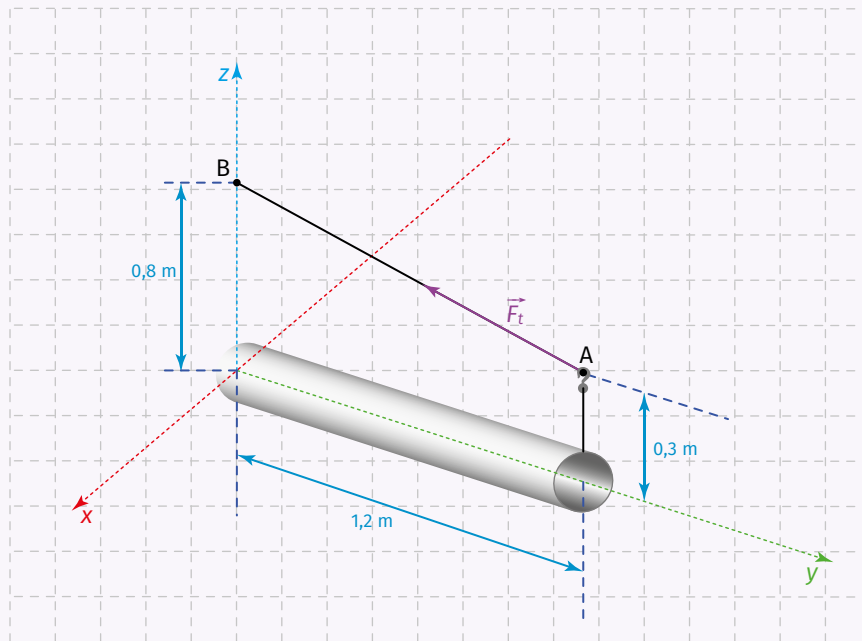
Antwoord: De trekkraft in de kabel moet ongeveer 3842 N zijn.



37



Een cilindervormige staaf wordt opgehangen aan een kabel tussen de punten A en B. De kabel oefent een trekkraft $\vec{F}_t$ uit op de haak in het punt A. De grootte van deze trekkraft bedraagt 1950 N (newton). Bepaal de coördinaat $(F_{t,x}, F_{t,y}, F_{t,z})$ van deze kracht.



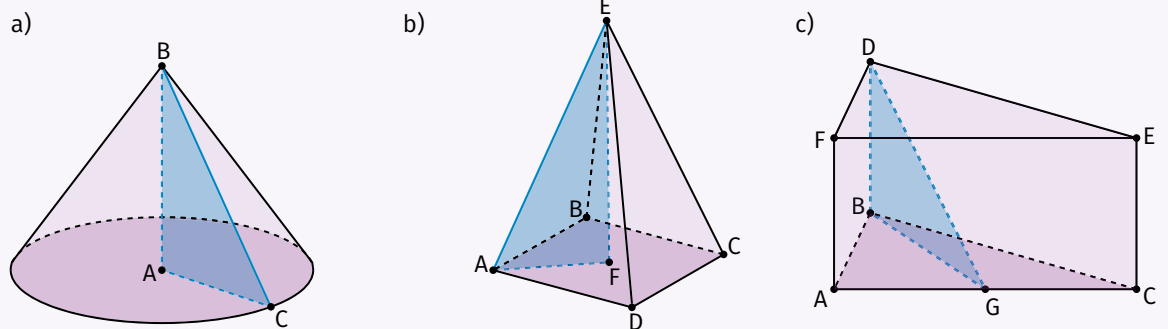
- $|AB| = \sqrt{(1,2 \text{ m})^2 + (0,5 \text{ m})^2}$
 $= 1,3 \text{ m}$
- $1,3 \text{ m} \rightarrow 1950 \text{ N}$
 $1 \text{ m} \rightarrow 1500 \text{ N}$
- $F_{t,x} = 0 \text{ N}$ (kracht ligt in het yz-vlak)
 $F_{t,y} = -1500 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 1,2 \text{ m} = -1800 \text{ N}$
 $F_{t,z} = 1500 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,5 \text{ m} = 750 \text{ N}$

Antwoord: De coördinaat van $\vec{F}_t$ is $(0, -1800, 750)$.



38

Formuleer de stelling van Pythagoras voor de blauwe rechthoekige driehoeken.

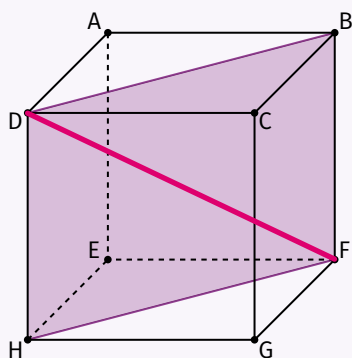


- a) $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$
- b) $|AF|^2 + |EF|^2 = |AE|^2$
- c) $|BD|^2 + |BG|^2 = |DG|^2$



39

Bereken de lengte van de diagonaal van het paarse diagonaalvlak van de kubus met ribbe 3 cm.



In $\triangle BCD$:

$$|BC|^2 + |CD|^2 = |BD|^2$$

$$3^2 + 3^2 = |BD|^2$$

$$9 + 9 = |BD|^2$$

$$18 = |BD|^2$$

$$\sqrt{18} = |BD|$$

In $\triangle DBF$:

$$|BD|^2 + |BF|^2 = |DF|^2$$

$$(\sqrt{18})^2 + 3^2 = |DF|^2$$

$$18 + 9 = |DF|^2$$

$$27 = |DF|^2$$

$$\sqrt{27} = |DF|$$

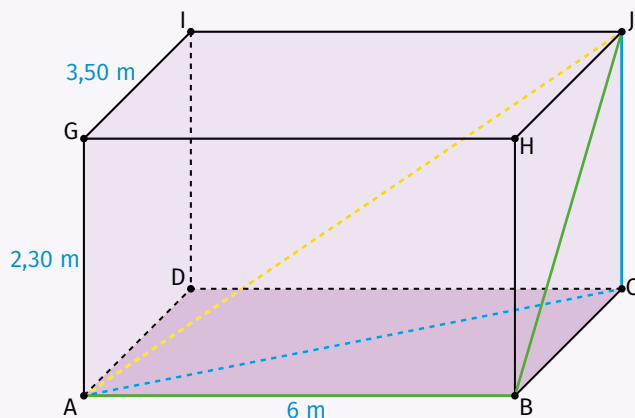
$$\sqrt{9 \cdot 3} = |DF|$$

$$3\sqrt{3} = |DF|$$

Antwoord: De lengte van de diagonaal van het diagonaalvlak is $3\sqrt{3}$ cm.



Een installateur van alarmsystemen heeft drie verschillende manieren (de gele, groene of blauwe weg) om van punt A naar punt J te gaan met de bekabeling. Welke weg is de kortste? Toon dit aan met een berekening.



groen: $|BC|^2 + |CJ|^2 = |BJ|^2$
 $3,50^2 + 2,30^2 = |BJ|^2$
 $12,25 + 5,29 = |BJ|^2$
 $17,54 = |BJ|^2$
 $\sqrt{17,54} = |BJ|$
 $4,19 \approx |BJ|$

$$|AB| + |BJ| \approx 6 + 4,19 = \underline{\underline{10,19}}$$

geel: $|AB|^2 + |BJ|^2 = |AJ|^2$
 $6^2 + (\sqrt{17,54})^2 = |AJ|^2$
 $36 + 17,54 = |AJ|^2$
 $53,54 = |AJ|^2$
 $\sqrt{53,54} = |AJ|$
 $\underline{\underline{7,32}} \approx |AJ|$

blauw: $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$
 $6^2 + 3,50^2 = |AC|^2$
 $36 + 12,25 = |AC|^2$
 $48,25 = |AC|^2$
 $\sqrt{48,25} = |AC|$
 $6,95 \approx |AC|$

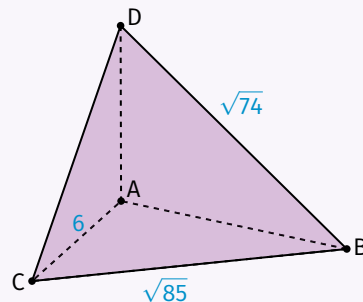
$$|AC| + |CJ| \approx 6,95 + 2,30 = \underline{\underline{9,25}}$$

Antwoord: De gele weg is de kortste.



41

Gegeven: piramide ABCD
 $AD \perp AC$, $AD \perp AB$ en $AB \perp AC$
 Gevraagd: $|AD|$ en $|AB|$



In $\triangle ABC$ met $\hat{A} = 90^\circ$:

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{85 - 6^2} \\ &= \sqrt{85 - 36} \\ &= \sqrt{49} \\ &= 7 \end{aligned}$$

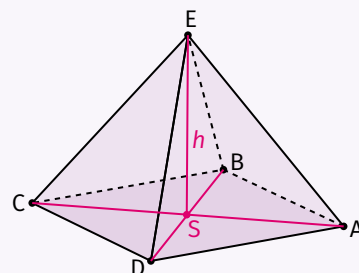
In $\triangle ABD$ met $\hat{A} = 90^\circ$:

$$\begin{aligned} |AD| &= \sqrt{74 - 7^2} \\ &= \sqrt{74 - 49} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$



42

Gegeven: piramide ABCDE waarvan het grondvlak een rechthoek is.
 $|AE| = |BE| = |CE| = |DE| = 9$
 $|AB| = 4$ en $|AD| = 6$
 Bereken de hoogte van de piramide.



S is het snijpunt van de diagonalen van het grondvlak $[AC]$ en $[BD]$.

- In de rechthoek ABCD:

$$\begin{aligned} |AC| &= \sqrt{6^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{36 + 16} \\ &= \sqrt{52} \\ &= 2\sqrt{13} \\ &= |BD| \quad (\text{diagonalen zijn even lang}) \end{aligned}$$
- $|AS| = \frac{1}{2}|AC|$

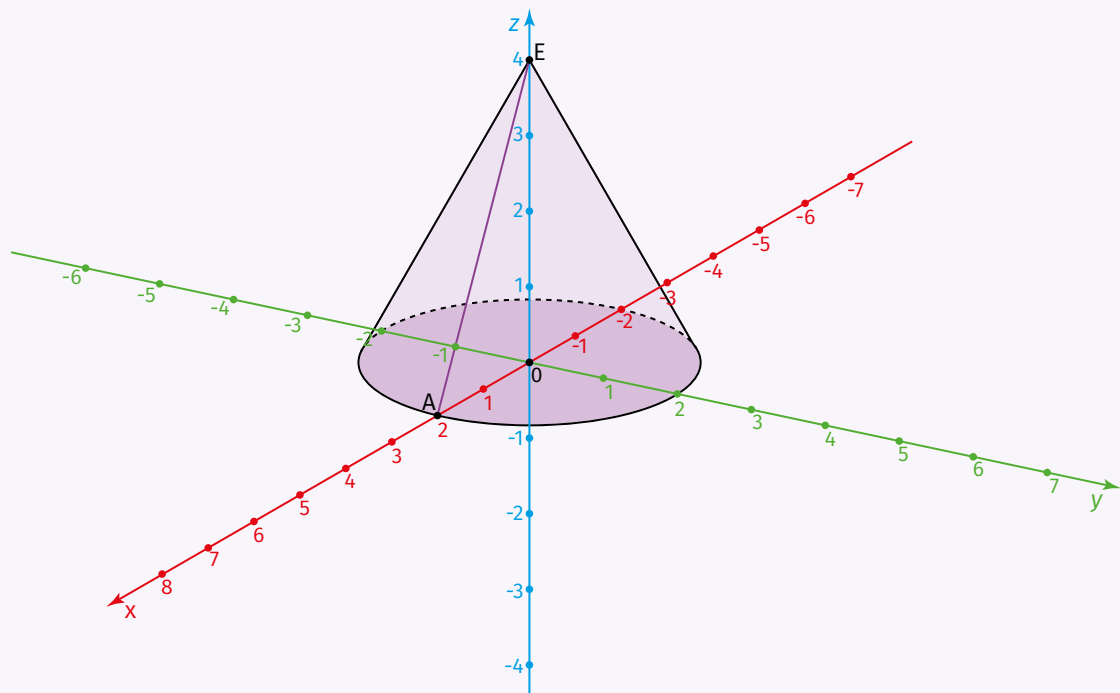
$$= \sqrt{13} \quad (\text{diagonalen snijden elkaar middendoor})$$
- In $\triangle EAS$ met $\hat{S} = 90^\circ$:

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{|AE|^2 - |AS|^2} \\ &= \sqrt{81 - 13} \\ &= \sqrt{68} \\ &= 2\sqrt{17} \end{aligned}$$

Antwoord: De hoogte van de piramide is gelijk aan $2\sqrt{17}$.



43

Bereken $|AE|$.

In $\triangle AEO$ met $\hat{O} = 90^\circ$:

$$|OE|^2 + |AO|^2 = |AE|^2$$

$$4^2 + 2^2 = |AE|^2$$

$$16 + 4 = |AE|^2$$

$$20 = |AE|^2$$

$$\sqrt{20} = |AE|$$

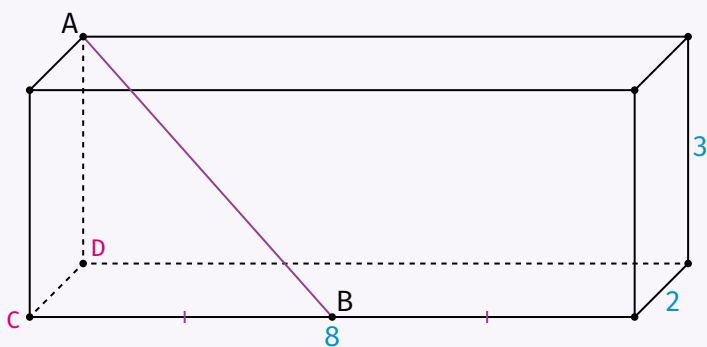
$$\sqrt{4 \cdot 5} = |AE|$$

$$2\sqrt{5} = |AE|$$



44

Bereken $|AB|$ in de gegeven balk.



In $\triangle BCD$:

$$|BC|^2 + |CD|^2 = |BD|^2$$

$$4^2 + 2^2 = |BD|^2$$

$$16 + 4 = |BD|^2$$

$$20 = |BD|^2$$

$$\sqrt{20} = |BD|$$

In $\triangle ABD$:

$$|AD|^2 + |BD|^2 = |AB|^2$$

$$3^2 + (\sqrt{20})^2 = |AB|^2$$

$$9 + 20 = |AB|^2$$

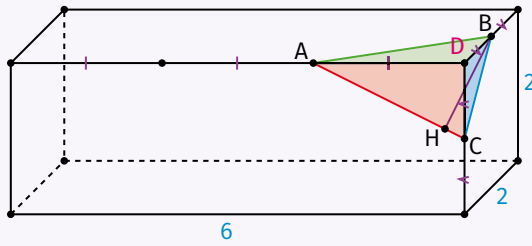
$$29 = |AB|^2$$

$$\sqrt{29} = |AB|$$



45

- a) Bereken de oppervlakte van de 3 gekleurde rechthoekige driehoeken.
 b) Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$ als je weet dat $|BH| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.
 c) Welk verband stel je vast tussen de oppervlaktes van de gekleurde driehoeken en de oppervlakte van $\triangle ABC$?



TIP Dit verband heet de stelling van De Gua.

$$a) A_{\text{groen}}: \frac{|AD| \cdot |BD|}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

$$A_{\text{rood}}: \frac{|AD| \cdot |CD|}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

$$A_{\text{blauw}}: \frac{|CD| \cdot |BD|}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$b) |AD|^2 + |CD|^2 = |AC|^2$$

$$2^2 + 1^2 = |AC|^2$$

$$4 + 1 = |AC|^2$$

$$5 = |AC|^2$$

$$\sqrt{5} = |AC|$$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{|AC| \cdot |BH|}{2} = \frac{\sqrt{5} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5}}{2} = \frac{\frac{3 \cdot 5}{5}}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

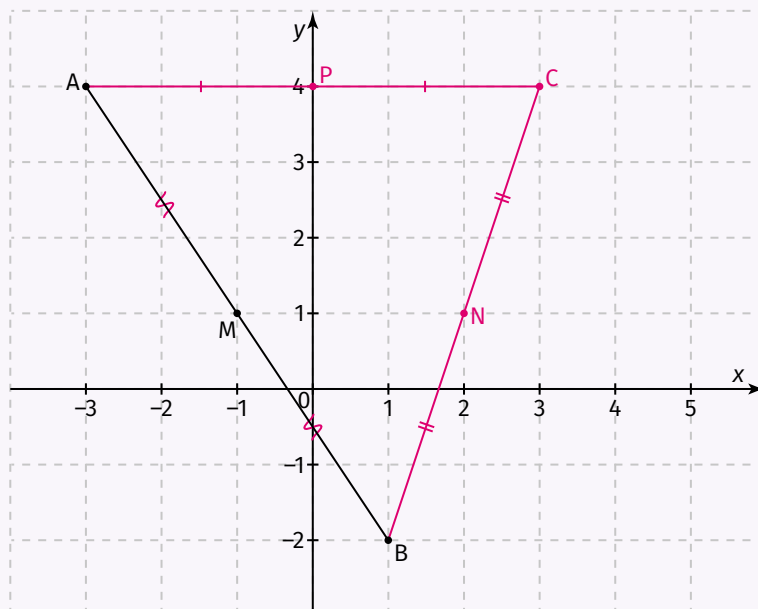
$$c) 1^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$(A_{\text{groen}})^2 + (A_{\text{rood}})^2 + (A_{\text{blauw}})^2 = (A_{\triangle ABC})^2$$



Gegeven: zie tekening.

- Bepaal $co(A)$, $co(B)$ en $co(M)$ door af te lezen.
- M is het midden van $[AB]$.
Controleer dit aan de hand van de coördinaten en meet na op de tekening.
- Teken $C(3, 4)$.
- Bepaal $co(N)$ als N het midden is van $[BC]$.
- Teken N en controleer of dit effectief het midden is van $[BC]$ door te meten.
- Bepaal $co(P)$ als P het midden is van $[AC]$.
- Teken P en controleer of dit effectief het midden is van $[AC]$ door te meten.



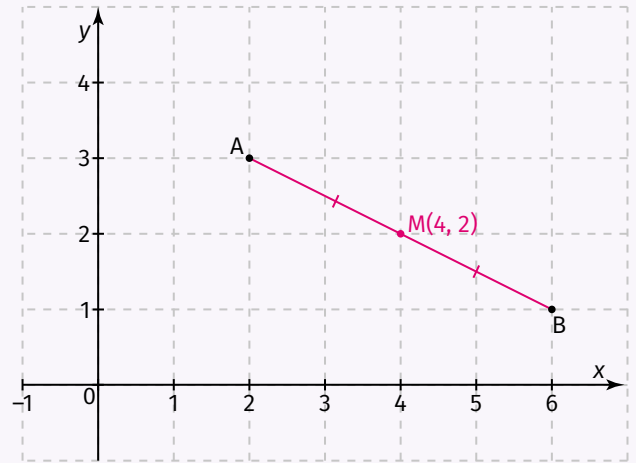
- $co(A) = (-3, 4)$
 $co(B) = (1, -2)$
 $co(M) = (-1, 1)$
- $\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{4+(-2)}{2} \right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{2}{2} \right) = (-1, 1)$
 $= co(M)$
- $co(B) = (1, -2)$
 $co(C) = (3, 4)$
 $co(N) = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{-2+4}{2} \right) = \left(\frac{4}{2}, \frac{2}{2} \right) = (2, 1)$
- $co(A) = (-3, 4)$
 $co(C) = (3, 4)$
 $co(P) = \left(\frac{-3+3}{2}, \frac{4+4}{2} \right) = \left(\frac{0}{2}, \frac{8}{2} \right) = (0, 4)$



47

Gegeven: zie tekening

- a) Bepaal $\text{co}(A)$ en $\text{co}(B)$.
 b) Bepaal $\text{co}(M)$ als M het midden is van $[AB]$.



a) $\text{co}(A) = (2, 3)$

$\text{co}(B) = (6, 1)$

b) $\text{co}(M) = \left(\frac{2+6}{2}, \frac{3+1}{2} \right)$

$\text{co}(M) = (4, 2)$

48

Bepaal $\text{co}(M)$ als M het midden is van $[AB]$ met $A(2, 2)$ en $B(10, 6)$.

$$\text{co}(M) = \left(\frac{2+10}{2}, \frac{2+6}{2} \right) = \left(\frac{12}{2}, \frac{8}{2} \right) = (6, 4)$$

49

Bepaal $\text{co}(M)$ als M het midden is van $[AB]$ met $A(-3, -3)$ en $B(3, 1)$.

$$\text{co}(M) = \left(\frac{-3+3}{2}, \frac{-3+1}{2} \right) = \left(\frac{0}{2}, \frac{-2}{2} \right) = (0, -1)$$

50

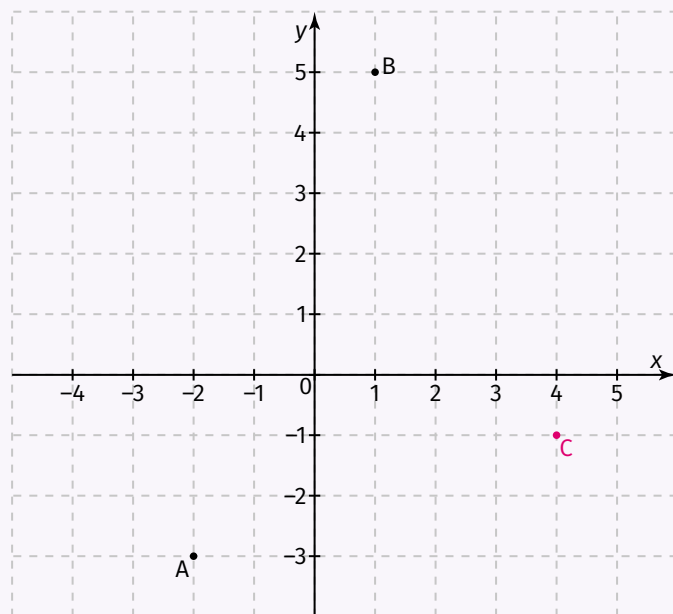
Bepaal $\text{co}(M)$ als M het midden is van $[AB]$ met $A(-3, 2)$ en $B(1, 10)$.

$$\text{co}(M) = \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{2+10}{2} \right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{12}{2} \right) = (-1, 6)$$

51

Gegeven: zie tekening.

- Bepaal $\text{co}(A)$ en $\text{co}(B)$.
- Bepaal $\text{co}(M)$ als M het midden is van $[AB]$.
- Teken $C(4, -1)$.
- Bepaal $\text{co}(N)$ als N het midden is van $[BC]$.
- Bepaal $\text{co}(P)$ als P het midden is van $[AC]$.



$$\text{a) } \text{co}(A) = (-2, -3) \text{ en } \text{co}(B) = (1, 5)$$

$$\text{b) } \text{co}(M) = \left(\frac{-2+1}{2}, \frac{-3+5}{2} \right) = \left(\frac{-1}{2}, 1 \right)$$

$$\text{d) } \text{co}(N) = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{5+(-1)}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, 2 \right)$$

$$\text{e) } \text{co}(P) = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-3+(-1)}{2} \right) = (1, -2)$$



Bepaal de afstand tussen de punten A en B op 2 decimalen nauwkeurig.

a) $A(-2, 8)$ en $B(6, -3)$

b) $A(-3, -5)$ en $B(2, 3)$

c) $A(4, -3)$ en $B(-2, 4)$

$$\begin{aligned}\text{a) } |AB| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(6 - (-2))^2 + (-3 - 8)^2} \\ &= \sqrt{8^2 + (-11)^2} \\ &= \sqrt{64 + 121} \\ &= \sqrt{185} \\ &\approx 13,60\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } |AB| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(2 - (-3))^2 + (3 - (-5))^2} \\ &= \sqrt{5^2 + 8^2} \\ &= \sqrt{25 + 64} \\ &= \sqrt{89} \\ &\approx 9,43\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } |AB| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-2 - 4)^2 + (4 - (-3))^2} \\ &= \sqrt{(-6)^2 + 7^2} \\ &= \sqrt{36 + 49} \\ &= \sqrt{85} \\ &\approx 9,22\end{aligned}$$



53

Bepaal de afstand tussen de punten A en B. Schrijf je uitkomst als een zo eenvoudig mogelijke wortelvorm.

- a) A(5, 8) en B(13, 12)
- b) A(17, 9) en B(30, 18)
- c) A(9, 3) en B(8, 10)

$$\begin{aligned}
 \text{a) } |AB| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
 &= \sqrt{(13 - 5)^2 + (12 - 8)^2} \\
 &= \sqrt{8^2 + 4^2} \\
 &= \sqrt{64 + 16} \\
 &= \sqrt{80} \\
 &= \sqrt{16 \cdot 5} \\
 &= 4\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } |AB| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
 &= \sqrt{(30 - 17)^2 + (18 - 9)^2} \\
 &= \sqrt{13^2 + 9^2} \\
 &= \sqrt{169 + 81} \\
 &= \sqrt{250} \\
 &= \sqrt{25 \cdot 10} \\
 &= 5\sqrt{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } |AB| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
 &= \sqrt{(8 - 9)^2 + (10 - 3)^2} \\
 &= \sqrt{(-1)^2 + 7^2} \\
 &= \sqrt{1 + 49} \\
 &= \sqrt{50} \\
 &= \sqrt{25 \cdot 2} \\
 &= 5\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

**54**

Stel de vergelijking van de cirkel op met middelpunt $M(\sqrt{3}, -4)$ en straal $3\sqrt{2}$. Werk vervolgens de haakjes in de vergelijking weg.

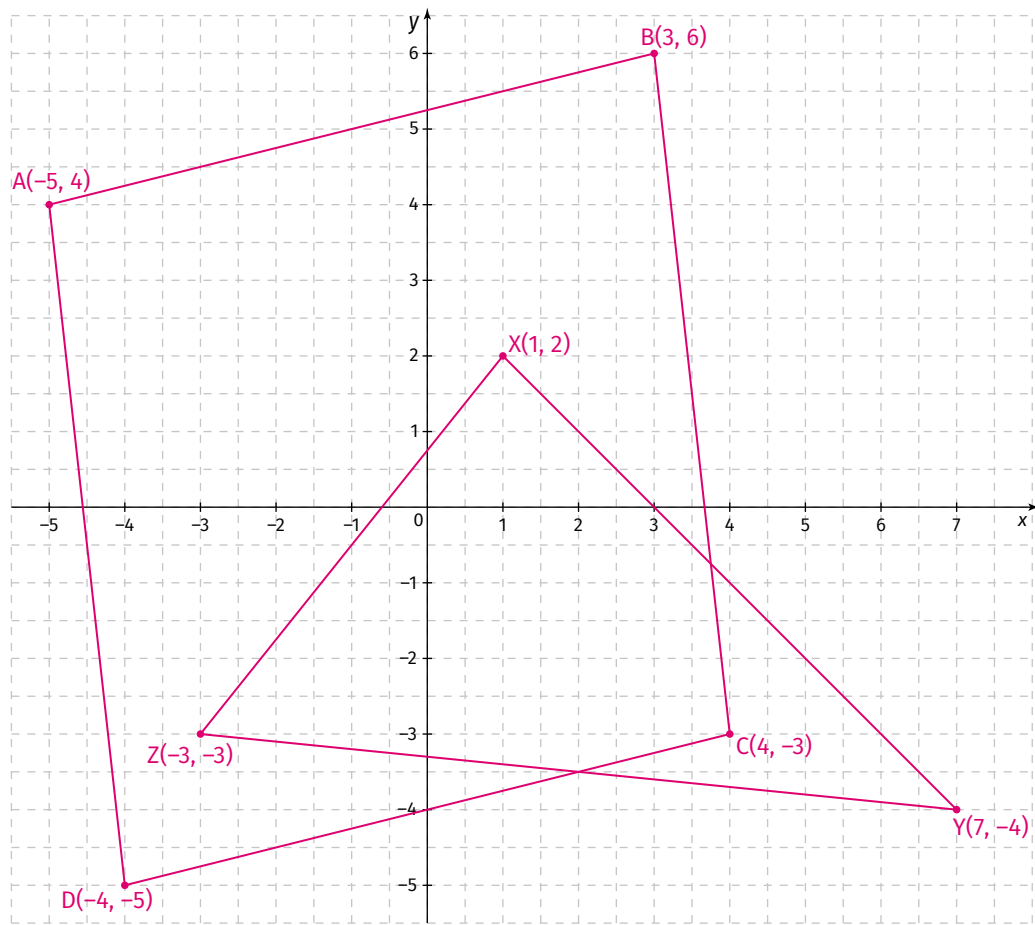
$$\begin{aligned}
 c &\leftrightarrow (x - \sqrt{3})^2 + (y + 4)^2 = (3\sqrt{2})^2 \\
 x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + y^2 + 8y + 16 &= 18 \\
 x^2 - 2\sqrt{3}x + y^2 + 8y + 1 &= 0
 \end{aligned}$$



Bereken de omtrek van de onderstaande veelhoeken in het vlak. Rond af op 3 decimalen nauwkeurig.

a) Vierhoek ABCD met A(-5, 4); B(3, 6); C(4, -3); D(-4, -5)

b) Driehoek XYZ met X(1, 2); Y(7, -4); Z(-3, -3)



$$\begin{aligned}
 \text{a) } |AB| &= \sqrt{(3+5)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} \\
 |BC| &= \sqrt{(4-3)^2 + (-3-6)^2} = \sqrt{1^2 + (-9)^2} = \sqrt{1+81} = \sqrt{82} \\
 |CD| &= \sqrt{(-4-4)^2 + (-5+3)^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-2)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} \\
 |AD| &= \sqrt{(-4+5)^2 + (-5-4)^2} = \sqrt{1^2 + (-9)^2} = \sqrt{1+81} = \sqrt{82}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{ABCD} &= |AB| + |BC| + |CD| + |AD| \\
 &= \sqrt{68} + \sqrt{82} + \sqrt{68} + \sqrt{82} \\
 &\approx 34,603
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } |XY| &= \sqrt{(7-1)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{6^2 + (-6)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} \\
 |YZ| &= \sqrt{(-3-7)^2 + (-3+4)^2} = \sqrt{(-10)^2 + 1^2} = \sqrt{100+1} = \sqrt{101} \\
 |ZX| &= \sqrt{(1+3)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{XYZ} &= |XY| + |YZ| + |ZX| \\
 &= \sqrt{72} + \sqrt{101} + \sqrt{41} \\
 &\approx 24,938
 \end{aligned}$$



56

Toon aan dat het punt $P(1, -6)$ op de cirkel ligt met middelpunt $M(4, -2)$ en straal 5.

$$c \leftrightarrow (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

$P \in c ?$

$$(1 - 4)^2 + (-6 + 2)^2 \stackrel{?}{=} 25$$

$$(-3)^2 + (-4)^2 \stackrel{?}{=} 25$$

$$9 + 16 \stackrel{?}{=} 25$$

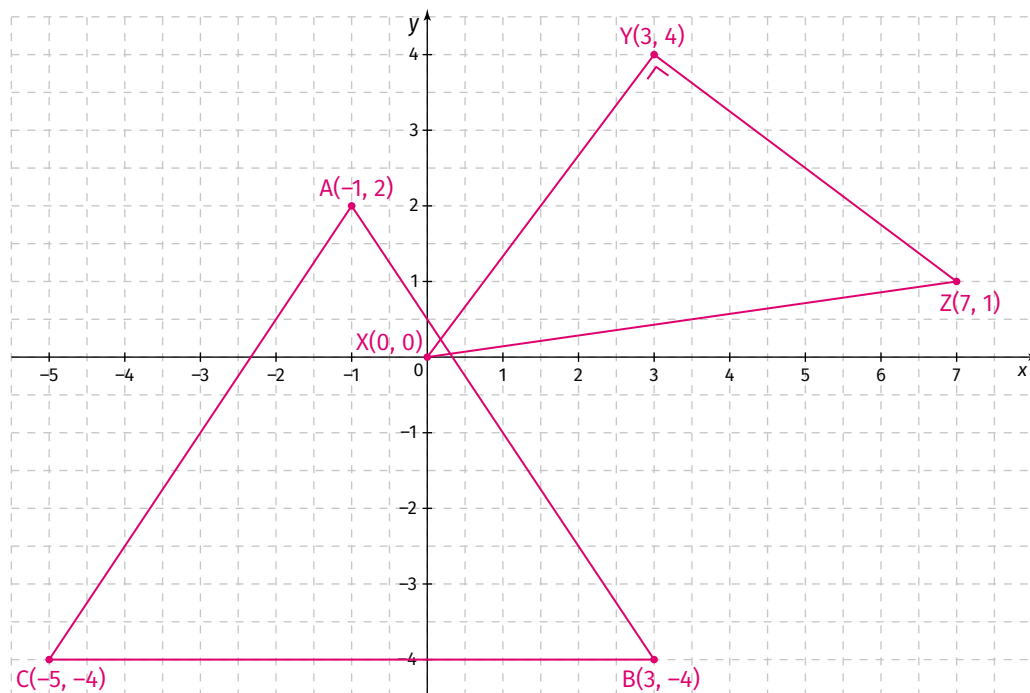
$$25 \stackrel{!}{=} 25$$



Zijn de onderstaande driehoeken rechthoekig? Zo ja, welke hoek is 90° ?

a) Driehoek ABC met $A(-1, 2)$; $B(3, -4)$; $C(-5, -4)$

b) Driehoek XYZ met $X(0, 0)$; $Y(3, 4)$; $Z(7, 1)$



$$\begin{aligned} \text{a) } |AB| &= \sqrt{(3+1)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{4^2 + (-6)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} \\ |BC| &= \sqrt{(-5-3)^2 + (-4+4)^2} = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = \sqrt{64+0} = \sqrt{64} = 8 \\ |CA| &= \sqrt{(-1+5)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l} |AB|^2 + |CA|^2 = (\sqrt{52})^2 + (\sqrt{52})^2 & |BC|^2 = 8^2 \\ = 52 + 52 & = 64 \\ = 104 & \end{array}$$

$\triangle ABC$ is niet rechthoekig.

$$\begin{aligned} \text{b) } |XY| &= \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \\ |YZ| &= \sqrt{(7-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \\ |ZX| &= \sqrt{(0-7)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l} |XY|^2 + |YZ|^2 = 5^2 + 5^2 & |ZX|^2 = (\sqrt{50})^2 \\ = 25 + 25 & = 50 \\ = 50 & \end{array}$$

$\triangle XYZ$ is rechthoekig in $\hat{Y}$.



Voorbeeld

We bepalen het middelpunt M en de straal r van de cirkel met vergelijking $x^2 + 8x + y^2 - 6y - 39 = 0$.

Deze vergelijking moeten we proberen te herschrijven in de vorm $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$.

- We vormen $x^2 + 8x$ om tot een volkomen kwadraat:

$$\begin{aligned} x^2 + 8x &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 - 4^2 \\ &= (x + 4)^2 - 16 \end{aligned}$$

- We vormen $y^2 - 6y$ om tot een volkomen kwadraat:

$$\begin{aligned} y^2 - 6y &= y^2 + 2 \cdot y \cdot (-3) + (-3)^2 - (-3)^2 \\ &= (y - 3)^2 - 9 \end{aligned}$$

We krijgen:

$$\begin{aligned} (x + 4)^2 - 16 + (y - 3)^2 - 9 - 39 &= 0 \\ (x + 4)^2 + (y - 3)^2 &= 16 + 9 + 39 \\ (x + 4)^2 + (y - 3)^2 &= 64 \end{aligned}$$

We besluiten dat het middelpunt $M(-4, 3)$ en de straal $r = 8$.



TIP

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

methode

Hoe bepaal je het middelpunt en de straal van een cirkel waarvan de vergelijking gegeven is?

STAP 1: Vul alle termen met x aan tot een volkomen kwadraat $(x - x_1)^2$.

STAP 2: Vul alle termen met y aan tot een volkomen kwadraat $(y - y_1)^2$.

STAP 3: Breng alle constante termen naar het rechterlid. Als dit rechterlid een positief getal is, dan is dit getal gelijk aan r^2 (kwadraat van de straal).

Bepaal de coördinaat van het middelpunt en de straal van de cirkels met de gegeven vergelijkingen.

- $c \leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y = 36$
- $c \leftrightarrow y^2 - 3y + x^2 + x - 2 = 0$
- $c \leftrightarrow 4x^2 + 12x + 4y^2 - 4y + 2 = 0$

$$\begin{aligned} \text{a) } c \leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 &= 36 + 4 + 9 \\ (x - 2)^2 + (y + 3)^2 &= 49 \end{aligned}$$

$$M(2, -3)$$

$$r = 7$$

$$\begin{aligned} \text{b) } c \leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 - 3y + \frac{9}{4} &= 2 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 &= 2 + \frac{5}{4} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$M\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$r = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } c &\leftrightarrow x^2 + 3x + y^2 - y + \frac{2}{4} = 0 \\
 x^2 + 3x + \frac{9}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} &= -\frac{1}{2} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} \\
 \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{8}{4} \\
 \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= 2 \\
 M\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
 r &= \sqrt{2}
 \end{aligned}$$



